

НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені М. П. Драгоманова
МІЖДИСЦИПЛІНАРНИЙ НАУКОВО-ДОСЛІДНИЙ ЦЕНТР
СКЛАДНИХ СИСТЕМ

DRAGOMANOV NATIONAL PEDAGOGICAL UNIVERSITY
INTERDISCIPLINARY RESEARCH CENTER
FOR COMPLEX SYSTEMS

**МІЖДИСЦИПЛІНАРНІ ДОСЛІДЖЕННЯ
СКЛАДНИХ СИСТЕМ**

**INTERDISCIPLINARY STUDIES
OF COMPLEX SYSTEMS**

Номер 9 • Number 9

Київ • Kyiv

2016

УДК 001.5
ББК 72
М57

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації
серія КВ № 19094-7884Р від 29 травня 2012 року

Рекомендовано до друку Вченою радою Національного педагогічного університету
імені М. П. Драгоманова (протокол № 3 від 27 жовтня 2016 року)

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

EDITORIAL BOARD

В. П. Андрущенко
*головний редактор,
Ректор Національного Педагогічного
Університету імені М. П. Драгоманова*

V. P. Andruschenko
*Editor-in-Chief,
Rector of Dragomanov National Pedagogical
University, Kyiv, Ukraine*

Ю. Г. Кондратьєв
*виконавчий редактор,
директор Міждисциплінарного науково-
дослідного центру складних систем НПУ;
університет м. Білефельд, Німеччина*

Yu. G. Kondratiev
*Managing Editor,
Director of Center of Interdisciplinary
Studies, NPU, Kyiv, Ukraine;
Bielefeld University, Germany*

Редактори:

Editors:

С. Альбервіо
Бонський університет (стохастика)

S. Albeverio
Bonn University (stochastics)

К. Болдрігіні
*університет «La Sapienza»,
Рим (математична фізика)*

C. Boldrighini
*University «La Sapienza»,
Rome (mathematical physics)*

В. Б. Євтух
НПУ (соціологія, психологія)

V. B. Yevtukh
NPU (sociology, psychology)

Р. В. Мендеш
Лісабонський університет (фізика)

R. V. Mendes
Lisbon University (physics)

М. В. Працьовитий
НПУ (математика)

N. V. Pratsovytyi
NPU (mathematics)

Г. М. Торбін
НПУ (математика)

G. M. Torbin
NPU (mathematics)

Д. Л. Фінкельштейн
*університет м. Свансі,
Велика Британія (математика)*

D. L. Finkelshtein
*Swansea University,
UK (mathematics)*

Л. Штрайт
*Білефельдський університет
(теорія складних систем)*

L. Streit
*Bielefeld University
(complex systems)*

Н. І. Шульга
НПУ (біологія)

N. I. Shulga
NPU (biology)

Секретар: Л. В. Савенкова

Secretary: L. V. Savenkova

М 57 Міждисциплінарні дослідження складних систем : [збірник наукових праць]. —
Номер 9. — К. : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2016. — 84 с.

ISSN 2307-4515

УДК 001.5
ББК 72

© Редакційна колегія, 2016

© Автори статей, 2016

© НПУ імені М. П. Драгоманова, 2016

Геометрія у дослідженні
складних систем

Geometry in the study
of complex systems

TIME BETWEEN REAL AND IMAGINARY: WHAT GEOMETRIES DESCRIBE UNIVERSE NEAR BIG BANG?

Yuri I. Manin¹

Abstract. For about a century, a great challenge for theoretical physics consisted in understanding the role of quantum mode of description of our Universe (“quantum gravity”). Einstein space–times on the scale of observable Universe do not easily submit to any naive quantization scheme. There are better chances to concoct a satisfying quantum picture of the very early space–time, near the Big Bang, where natural scales of events like inflation extrapolated from current observations resist any purely classical description and rather require quantum input.

Many physicists and mathematicians tried to understand the quantum early Universe, sometimes unaware of input of the other community. One of the goals of this article is to contribute to the communication of the two communities. In the main text, I present some ideas and results contained in the recent survey/research papers [Le13] (physicists) and [MaMar14], [MaMar15] (mathematicians).

Introduction and survey

0.1. Relativistic models of space–time: Minkowski signature. Most modern mathematical models in cosmology start with description of space–time as a 4–dimensional *pseudo-Riemannian manifold* M endowed with metric

$$ds^2 = \sum g_{ik} dx^i dx^k$$

of signature $(+, -, -, -)$ where $+$ refers to time–like tangent vectors, whereas the infinitesimal light–cone consists of null–directions. Each such manifold is a point in the infinite–dimensional configuration space of cosmological models.

Basic cosmological models are constrained by *Einstein equations*

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} + \Lambda g_{ik} = 8\pi G T_{ik}$$

and/or additional *symmetry postulates*, of which the most essential for us here are the so called *Bianchi IX space–times*, here with symmetry group $SO(3)$, cf. [To13] and [Ne13] for a recent context.

¹Max–Planck–Institut für Mathematik, Bonn, Germany. manin@mpim-bonn.mpg.de

This article was published in *Mathematical Journal* (vol. 16, No. 2(60), 2016), the journal of the Institute of Mathematics and mathematical modeling (<http://www.math.kz>) of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan. We are grateful to the author and publishers for their kind permission granted to republish the article.

In this model, the space–time is fibered over the semi–axis of a global (“cosmological”) time t . Fibres are homogeneous spaces over $SO(3)$, and the negative Einstein metric $-ds^2$ induces on them a metric of constant curvature. In order to write ds^2 in convenient coordinates, we choose a fixed time–like geodesic (“observer’s history”) along which ds^2 is dt^2 , and coordinatize each space section at the time t by the invariant distance r from the observer and two natural angle coordinates θ, ϕ on the sphere of radius r . By rescaling the radial coordinate, we may assume that the curvature constant k takes one of three values: $k = \pm 1$ or 0 .

This rescaling produces the natural unit of length, when $k \neq 0$, and the respective unit of time is always chosen so that the speed of light is $c = 1$.

The Friedman–Robertson–Walker (FRW) metric is then given by the formula

$$ds^2 := dt^2 - R(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (0.1)$$

0.2. Input of observations. One of the most counter–intuitive discoveries of the XX–th century cosmology was the “observability” of cosmological time t and possibility to estimate its natural scale (“age of our Universe”). We now know that it is about $14 \cdot 10^9$ years, or five million times longer than the age of human civilisation. Together with considerable homogeneity of the observable space section (local metric disturbances caused by galaxies are counted as negligible) this gives considerable weight to the results of mathematical studies of Bianchi IX $SO(3)$ –models.

A robust version of observable global time is the inverse temperature $1/kT$ of the cosmic microwave background (CMB) radiation. It is accepted that the current value of it measures the global age of our Universe starting from the time when it stopped to be opaque for light, about $38 \cdot 10^4$ years after the Big Bang. Near the Big Bang our Universe was extremely hot, and its evolution is measured by its cooling.

Another version of time is furnished by measurements of the redshift of “standard candles” in observable galaxies, thus putting their current appearance on various cosmological time sections of our Universe (Hubble’s Law).

Remarkably, generally accepted physical pictures of the Universe involve also unimaginably small periods of cosmological time: between 10^{-40} and 10^{-30} seconds after the Big Bang the radius of space sections has grown 10^{30} times (“inflation era”), with speed many orders of magnitude exceeding the speed of light. The inflation period is postulated in order to explain the homogeneity of space–time sections of observable Universe (on the scale where galaxies are negligible perturbations).

Last but not least: dynamical equations which must be satisfied by metrics of space–time are defined by the choice of Lagrangian (or Hamiltonian as soon as cosmological time variable is introduced). Besides the metric curvature, this Lagrangian may contain contributions from (models of) massive matter, electro–magnetic field etc. Observations led to the picture of the so called “dark matter” and “dark energy” participating only in gravitational interaction. Their cosmological influence far exceeds that of usual matter, say, content of galaxies. In particular, non–vanishing Einstein’s cosmological con-

stant Λ responsible for the “dark energy” effect must explain the observable *accelerating expansion* of the Universe.

For more details, see [AU], [Bal].

0.3. Primeval chaos: going backwards in time. As we have already stressed, in mathematical models of general relativity, the notion of time is local: along each oriented geodesic whose tangent vectors lie inside respective light cones, the differential of its time function dt is ds restricted to this geodesic. Applying this prescription formally, we see that even in a flat space–time, along space–like geodesics time becomes purely imaginary, whereas light–like geodesics along which time “stays still”, form a wall. The respective wall–crossing in the space of geodesics produces the Wick rotation of time, from real axis to the pure imaginary axis. Along any light–like geodesic, “real” time stops, however “pure imaginary time flow” makes perfect sense appearing e. g., as a variable in wave–functions of photons.

In the main text, we will describe models (suggested in [MaMar14–15]) in which *cosmological time becomes imaginary also at the past boundary of the universe* $t = 0$. However, in these models the reverse Wick rotation does not happen instantly. Instead, it includes the movement of time along a random geodesic curve in the complex half plane endowed with its standard hyperbolic metric.

Moreover, the set of all such geodesics (modulo a subgroup of $PSL(2, \mathbf{Z})$) is endowed with much studied invariant measure, and we regard the resulting classical statistical system as an approximation to an (unknown) quantum description of the early Universe.

Our primary motivation (cf. [MaMar14]) was the desire to explain the pure formal coincidence of the dynamics of two very different systems:

A. *Mixmaster Universe.* In this model, one studies Bianchi IX $SO(3)$ with metric that in appropriate coordinates takes form $ds^2 = dt^2 - a(t)dx^2 - b(t)dy^2 - c(t)dz^2$, $t > 0$. It turns out that the respective Einstein equations have a family of Kasner’s exact solutions $a(t) = t^{p_a}$, $b(t) = t^{p_b}$, $c(t) = t^{p_c}$. Moreover, mathematical methods of qualitative studies of dynamical systems suggest that a *generic solution* of the relevant Einstein equations, traced backwards in time towards the Big Bang moment $t = 0$, can be approximated by an infinite sequence of Kasner’s solutions.

B. *Hyperbolic billiard.* The relevant dynamical system is the hyperbolic billiard on a standard fundamental domain for $PSL(2, \mathbf{Z})$ (or a finite index subgroup), encoded in the Poincaré return map with respect to the boards of this billiard: see [Ar24], [Se85], [Le13], [MaMar15].

However, accommodating Mixmaster Universe in the hyperbolic billiard picture seems to require an analytic continuation of Kasner’s solutions. It is not known, and according to some computer assisted studies, time in Kasner’s models does not admit the necessary analytic continuation involving space–like coordinates as well, cf. [LuCh13].

In [MaMar15], we avoided this obstacle by looking at the geometry of space–times from the perspective of imaginary time axis. This means that we start with space–times with metrics of the Euclidean signature $(+, +, +, +)$. In the framework of cosmology, they correspond to Bianchi IX $SU(2)$ –symmetric

space–times, where all coordinates generally can take complex values, so that it makes sense to trace time flow along the relevant geodesics.

0.4. Relativistic models of space–time: Euclidean signature. In these models, space–times satisfying a complexified version of Einstein equations are Bianchi IX four–dimensional manifolds, fibered over domains of complex plane of time, whose fibres are $SU(2)$ –homogeneous spaces (rather than $SO(3)$ –homogeneous spaces in the cases of Minkowski signature). By analogy with Yang–Mills instantons, they are sometimes called *gravitational instantons*.

More precisely, consider the $SU(2)$ Bianchi IX model with metric of the form

$$g = F \left(d\mu^2 + \frac{\sigma_1^2}{W_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{W_2^2} + \frac{\sigma_3^2}{W_3^2} \right). \quad (0.2)$$

Here μ is the relevant version of the cosmological time, (σ_j) are $SU(2)$ –invariant forms along space–sections with $d\sigma_i = \sigma_j \wedge \sigma_k$ for all cyclic permutations of $(1, 2, 3)$, and F is a conformal factor.

By analogy with the $SO(3)$ case and metric $dt^2 - a(t)^2 dx^2 - b(t)^2 dy^2 - c(t)^2 dz^2$, in the main text we will treat W_i (as well as some natural monomials in W_i and F) as $SU(2)$ –*scaling factors*.

It is important that, contrary to the $SO(3)$ –case, generic anti–self–dual Einstein metrics (solutions of Einstein equations) in the $SU(2)$ –case can be written explicitly in terms of elliptic modular functions whereas their chaotic behaviour along geodesics in the complex half–plane of time becomes only a reflection of the chaotic behaviour of the respective billiard ball trajectories.

A natural quantisation scheme of gravitational instantons involves non–commutative deformations of their toric space sections. Focussing on this quantisation scheme, in [MaMar15] we gave additional arguments about relationship between Mixmaster chaos and quantum mechanics of the Big Bang, but this time not involving Kasner’s solutions at all: see section 2 of the main text.

0.5. Boundaries of space–times. The statement invoked above that the generic $SO(3)$ space–times traced back to $t \rightarrow 0$ can be approximated by an infinite sequence of Kasner’s solutions is mathematically formulated and proved by considering a partial compactification of the respective phase–spaces and studying the geometry of separatrices on the boundary of a partial compactification of these phase spaces: see [BoNo73], [Bo85].

Another type of boundaries was considered in [MaMar14], where we tried to produce algebraic–geometric models of Roger Penrose’s “aeons”: see [Pe10] and [Pe64]–[Pe02]. According to his scheme, the moment $t = 0$ of our cosmological time might have been preceded by evolution of another Universe, the cold death of which was a prequel of our Big Bang. According to Penrose, conformal classes of the respective metrics furnish a continuous transition from the previous aeon to the next one.

Since a conformal change of the metric does not change the relevant light cone in the tangent space at any point of space–time, we suggested in [MaMar14] matching pairs of boundaries between aeons, in which the projective compactification of cold Minkowski space–time of previous aeon matches the blown up divisor over the Big Bang point of the next aeon.

Cosmology has its own singular place in the body of scientific knowledge: the same quest for the meaning of Universe influences philosophy, poetry, faith (cf. two remarkable books [Lam07], [Lam15] about life, faith and research of Canon Georges Lemaitre, the first discoverer of Hubble’s Law and Big Bang picture).

I will therefore close this introduction quoting the wonderful lines by Steven Weinberg ([We77]):

As I write this I happen to be in an airplane at 30,000 feet, flying over Wyoming en route home from San Francisco to Boston. Below, the earth looks very soft and comfortable — fluffy clouds here and there, snow turning pink as the sun sets, roads stretching straight across the country from one town to another. It is very hard to realize that this is just a tiny part of an overwhelmingly hostile universe. It is even harder to realise that this present universe has evolved from an unspeakably unfamiliar early condition, and faces a future extinction of endless cold or intolerable heat. The more the universe seems comprehensible, the more it also seems pointless.

But if there is no solace in the fruits of our research, there is at least some consolation in the research itself. Men and women are not content to comfort themselves with tales of gods and giants, or to confine their thoughts to the daily affairs of life; they also build telescopes and satellites and accelerators, and sit at their desks for endless hours working out the meaning of the data they gather. The effort to understand the universe is one of the very few things that lifts human life a little above the level of farce, and gives it some of the grace of tragedy.

Steven Weinberg. “The first three minutes.”

1 Cosmological time, elliptic integrals, and upper complex half-plane

1.1. Minkowski signature: late Universe. Following [To13] and [Ne13], we consider the cosmological time at the late stage of the FRW model (0.1).

It is convenient to replace r in (0.1) by the third dimensionless “angle” coordinate $\chi := r/R(t)$. Then (0.1) becomes

$$ds^2 := dt^2 - R(t)^2 [d\chi^2 + S_k^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)], \quad (1.1)$$

where $S_k(\chi) = \sin \chi$ for $k = 1$; χ for $k = 0$; and $\sinh \chi$ for $k = -1$.

This rescaling produces the natural unit of length, when $k \neq 0$, and the respective unit of time is always chosen so that the speed of light is $c = 1$.

Dynamic in this model is described by one real function $R(t)$: it increases from zero at the Big Bang of one aeon to infinity.

We scale $R(t)$ by putting $R = 1$ “now”, as in [To13]. Notations in [To13] slightly differ from ours. In his formula for metric (2), r is our χ , and $f_k(r)$ is our $S_k(\chi)$.

This function is constrained by the Einstein–Friedman equations (here with cosmological constant $\Lambda = 3$), which leads to the introduction of the elliptic curve given by the equation in the (Y, R) -plane

$$Y^2 = R^4 + aR + b \tag{1.2}$$

(see [To13], equation (3), and [Ne13], eq. (9), where their S is the same as our R).

Besides the proper time t , and the scale factor $R(t)$, global time may be measured by its conformal version τ , which according to [To], formula (3), may be given as the Abelian integral along a real curve on the complex torus, Riemann surface of the elliptic curve (1.2):

$$\tau \cong \int_0^{R(t)} \frac{dR}{Y}. \tag{1.3}$$

Physical interpretation of the coefficients a, b as characterising matter and radiation sources in Einstein equations for this model for which we refer the reader to [OlPe05] and [To13], shows that in principle a, b also depend on time. Then (1.2) describes a family of elliptic curves parametrized in a way that is classic and well known to algebraic geometers. In particular, cosmological time variable moves along one of the versions of base families of elliptic curves.

Universal families of elliptic curves are parametrized by upper complex half-plane and its quotients (modular curves), and we see now that a family of elliptic curves (1.2) naturally emerges in the description of a late stage of evolution of the FRW model. In a pure mathematical context, the reader is invited to compare our suggestion with the treatment of the Painlevé VI equation in [Ma96] and the whole hierarchy of Painlevé equations in [Ta01].

Now we will discuss a totally different way in which the chaotic evolution in Mixmaster early Universe leads to the appearance of modular curves as well.

1.2. Minkowski signature: early Universe and Mixmaster chaos. As a model of the early universe emerging after the Big Bang we take here the Bianchi IX space–time, admitting $SO(3)$ -symmetry of its space–like sections. We will choose coordinates in which its metric takes the following form:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 dx^2 - b(t)^2 dy^2 - c(t)^2 dz^2, \tag{1.4}$$

where the coefficients $a(t), b(t), c(t)$ are called scaling factors.

A family of such metrics satisfying Einstein equations is given by *Kasner solutions*,

$$a(t) = t^{p_1}, \quad b(t) = t^{p_2}, \quad c(t) = t^{p_3} \tag{1.5}$$

in which p_i are points on the real algebraic curve

$$\sum p_i = \sum p_i^2 = 1. \tag{1.6}$$

These metrics become singular at $t = 0$ which is the Big Bang moment.

Around 1970, V. Belinskii, I. M. Khalatnikov, E. M. Lifshitz and I. M. Lifshitz argued that almost every solution of the Einstein equations for (1.4) *traced*

backwards in time $t \rightarrow +0$ can be approximately described by a sequence of solutions (1.5) or equivalently, of points (1.6): see [KLiKhShSi85] for a later and more comprehensive study. The n -th point of this sequence begins the respective n -th *Kasner era*, at the end of which a jump to the next point occurs, see below.

A mathematically careful treatment of this discovery in [BoNo73] has shown that this encoding is certainly applicable to *another dynamical system* which is defined on the boundary of a certain compactification of the phase space of this Bianchi IX model and in a sense is its limit.

Construction of this boundary involves a nontrivial real blow up at the $t = 0$, see details in [Bo85]. The resulting boundary is an attractor, it supports an array of fixed points and separatrices, and the jumps between separatrices which result from subtle instabilities account for jumps between successive Kasner's regimes, corresponding to different points of (1.6).

In what sense this picture approximates the actual trajectories, is a not quite trivial question: cf. the last three paragraphs of the section 2 of [KLiKhShSi85], where it is explained that among these trajectories there can exist "anomalous" cases when the description in terms of Kasner eras does not make sense, but that they are, in a sense, infinitely rare. See also the recent critical discussion in [LuCh13].

Here are some details of the classical description.

(a) *Continued fractions.* We denote by \mathbf{Z} , resp. \mathbf{Z}_+ , the set of integers, resp. positive integers; \mathbf{Q} , resp. \mathbf{R} is the field of rational, resp. real numbers. For $x \in \mathbf{R}$, we put $[x] := \max\{m \in \mathbf{Z} \mid m \leq x\}$.

Irrational numbers $x > 1$ admit the canonical infinite continued fraction representation

$$x = k_0 + \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \dots}} =: [k_0, k_1, k_2, \dots], \quad k_s \in \mathbf{Z}_+ \quad (1.7)$$

in which $k_0 := [x]$, $k_1 = [1/(x - k_0)]$ etc. Notice that our convention differs from that of [KLiKhShSi85]: their $[k_1, k_2, \dots]$ means our $[0, k_1, k_2, \dots]$.

(b) *Transformation T .* The (partial) map $\tilde{T} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$ is defined by

$$\tilde{T} : (x, y) \mapsto \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right], \frac{1}{y + [1/x]} \right), \quad (1.8)$$

If both coordinates $(x, y) \in [0, 1]^2$ are irrational (the complement is a subset of measure zero), we have for uniquely defined $k_s \in \mathbf{Z}_+$:

$$x = [0, k_0, k_1, k_2, \dots], \quad y = [0, k_{-1}, k_{-2}, \dots].$$

Then

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right] &= [0, k_1, k_2, \dots], \\ \frac{1}{y + [1/x]} &= \frac{1}{k_0 + y} = [0, k_0, k_{-1}, k_{-2}, \dots]. \end{aligned}$$

On this subset, \tilde{T} is bijective and has invariant density

$$\frac{dx dy}{\ln 2 \cdot (1 + xy)^2}$$

(cf. [May87]).

Thus we may and will bijectively encode irrational pairs $(x, y) \in [0, 1]^2$ by doubly infinite sequences

$$(k) := [\dots k_{-2}, k_{-1}, k_0, k_1, k_2, \dots], k_i \in \mathbf{Z}_+$$

in such a way that the map \tilde{T} above becomes the shift of such a sequence denoted T :

$$T(k)_s = k_{s+1}. \quad (1.9)$$

(c) *Continued fractions and Mixmaster chaos.* Any point (p_a, p_b, p_c) in (1.6) can be obtained by choosing a unique $u \in [1, \infty]$, putting

$$p_1^{(u)} := -\frac{u}{1+u+u^2} \in [-1/3, 0], \quad p_2^{(u)} := \frac{1+u}{1+u+u^2} \in [0, 2/3],$$

$$p_3^{(u)} := \frac{u(1+u)}{1+u+u^2} \in [2/3, 1] \quad (1.10)$$

and then rearranging the exponents $p_1^{(u)} \leq p_2^{(u)} \leq p_3^{(u)}$ by a bijection $(1, 2, 3) \rightarrow (a, b, c)$.

As we have already explained, a “typical” solution γ of Einstein equations (vacuum, or with various energy momentum tensors) with $SO(3)$ -symmetry of the Bianchi IX type, followed from an arbitrary (small) value $t_0 > 0$ in the reverse time direction $t \rightarrow +0$, oscillates close to a sequence of Kasner type solutions.

Somewhat more precisely, introduce the local logarithmic time Ω along this trajectory with inverted orientation. Its differential is $d\Omega := -\frac{dt}{abc}$, and the time itself is counted from an arbitrary but fixed moment. Then $\Omega \rightarrow +\infty$ approximately as $-\log t$ as $t \rightarrow +0$, and we have the following picture.

As $\Omega \cong -\log t \rightarrow +\infty$, a “typical” solution γ of the Einstein equations determines a sequence of infinitely increasing moments $\Omega_0 < \Omega_1 < \dots < \Omega_n < \dots$ and a sequence of irrational real numbers $u_n \in (1, +\infty)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

The time semi-interval $[\Omega_n, \Omega_{n+1})$ is called the n -th *Kasner era* for the trajectory γ (in [Le13], our eras are called epochs). Within the n -th era, the evolution of a, b, c is approximately described by several consecutive Kasner’s formulas. Time intervals where scaling powers (p_i) are constant are called *Kasner’s cycles* (in [Le13], our cycles are called eras).

The evolution in the n -th era starts at time Ω_n with a certain value $u = u_n > 1$ which determines the sequence of respective scaling powers during the first cycle (1.10):

$$p_1 = -\frac{u}{1+u+u^2}, \quad p_2 = \frac{1+u}{1+u+u^2}, \quad p_3 = \frac{u(1+u)}{1+u+u^2}$$

The next cycles inside the same era start with values $u = u_n - 1, u_n - 2, \dots$, and scaling powers (1.10) corresponding to these numbers, rearranged corresponding to a bijection $(1, 2, 3) \rightarrow (a, b, c)$ which is in turn identical to the

previous one, or interchanges b and c (see [MaMar02] or [Le13] for a modular interpretation).

After $k_n := [u_n]$ cycles inside the current era, a jump to the next era comes, with parameter

$$u_{n+1} = \frac{1}{u_n - [u_n]}. \tag{1.11}$$

Moreover, ensuing encoding of γ 's and respective sequences (u_i) 's by continued fractions (1.7) of real irrational numbers $x > 1$ is bijective on the set of full measure.

Finally, when we want to include into this picture also the sequence of logarithmic times Ω_n starting new eras, we naturally pass to the two-sided continued fractions and the transformation T . Here are some details.

(d) *Doubly infinite sequences and modular geodesics.* Let $H := \{z \in \mathbf{C}, \text{Im } z > 0\}$ be the upper complex half-plane with its Poincaré metric $|dz|^2/|\text{Im } z|^2$. Denote also by $\overline{H} := H \cup \{\mathbf{Q} \cup \{\infty\}\}$ this half-plane completed with cusps.

The vertical lines $\text{Re } z = n, n \in \mathbf{Z}$, and semicircles in \overline{H} connecting pairs of finite cusps $(p/q, p'/q')$ with $pq' - p'q = \pm 1$, cut \overline{H} into the union of geodesic ideal triangles which is called the *Farey tessellation*.

Following [Ar24], [Se85], consider the set of *oriented* geodesics β 's in H with ideal irrational endpoints in \mathbf{R} . Let $\beta_{-\infty}$, resp. β_{∞} be the initial, resp. the final point of β . Let B be the set of such geodesics with $\beta_{-\infty} \in (-1, 0), \beta_{\infty} \in (1, \infty)$. Put

$$\beta_{-\infty} = -[0, k_0, k_{-1}, k_{-2}, \dots], \quad \beta_{\infty} = [k_1, k_2, k_3, \dots], \quad k_i \in \mathbf{Z}_+, \tag{1.12}$$

and encode β by the doubly infinite continued fraction

$$[\dots k_{-2}, k_{-1}, k_0, k_1, k_2, \dots]. \tag{1.13}$$

The geometric meaning of this encoding can be explained as follows. Consider the intersection point $x = x(\beta)$ of β with the imaginary semiaxis in H . Moving along β from x to β_{∞} , one will intersect an infinite sequence of Farey triangles. Each triangle is entered through a side and left through another side, leaving the ideal intersection point (a cusp) of these sides either to the left, or to the right. Then the infinite word in the alphabet $\{L, R\}$ encoding the consecutive positions of these cusps wrt β will be $L^{k_1} R^{k_2} L^{k_3} R^{k_4} \dots$. Similarly, moving from $\beta_{-\infty}$ to x , we will get the word (infinite to the left) $\dots L^{k_{-1}} R^{k_0}$.

We can enrich the new notation $\dots L^{k_{-1}} R^{k_0} L^{k_1} R^{k_2} L^{k_3} R^{k_4} \dots$ (called *cutting sequence* of our geodesic in [Se85]) by inserting between the consecutive powers of L, R notations for the respective intersection points of β with the sides of Farey triangles. So $x_0 := x = x(\beta)$ will be put between R^{k_0} and L^{k_1} , and generally we can imagine the word

$$\dots L^{k_{-1}} x_{-1} R^{k_0} x_0 L^{k_1} x_1 R^{k_2} x_2 L^{k_3} x_3 R^{k_4} \dots \tag{1.14}$$

Since the Farey tessellation is acted upon by the modular group $PSL(2, \mathbf{Z})$ and its hyperbolic extension including orientation changing isometries of H , we may present another version of the geometric description of geodesic flow. This

is an equivalent dynamical system which is the triangular hyperbolic billiard with infinitely distant corners (“pockets”): see [Ar24], [Se85], [Le13], [Ma-Mar15].

Here we use the term “hyperbolic” in order to indicate that sides (boards) of the billiard and trajectories of the ball (“particle”) are geodesics with respect to the hyperbolic metric of constant curvature -1 of the billiard table. This is not the standard meaning of the hyperbolicity in this context, where it usually refers to non-vanishing Lyapunov exponents.

(e) Proposition. *All hyperbolic triangles of the Farey tessellation of \overline{H} are isomorphic as metric spaces.*

For any two closed triangles having a common side there exists unique metric isomorphism of them identical along this side. It inverts orientation induced by H . Starting with the basic triangle Δ with vertices $\{0, 1, i\infty\}$ and consecutively using these identifications, one can unambiguously define the map $b: \overline{H} \rightarrow \Delta$.

Any oriented geodesic on H with irrational end-points in \mathbf{R} is sent by the map b to a billiard ball trajectory on the table Δ never hitting corners.

All this is essentially well known since at least [Ar24].

It is also worth noticing that although all three sides of Δ are of infinite length, this triangle is *equilateral* in the following sense: there exists a group S_6 of hyperbolic isometries of Δ acting on vertices by arbitrary permutations. This group has a unique fixed point $\rho := \exp(\pi i/3)$ in Δ , the *centroid* of Δ .

In fact, this group is generated by two isometries: $z \mapsto 1 - z^{-1}$ and symmetry with respect to the imaginary axis.

Three finite geodesics connecting the centre ρ with points $i, 1 + i, \frac{1+i}{2}$ respectively, subdivide Δ into three geodesic quadrangles, each having one infinite (cusp) corner. We will call these points *centroids* of the respective sides of Δ , and the geodesics (ρ, i) etc. *medians* of Δ .

Each quadrangle is the fundamental domain for $PSL(2, \mathbf{Z})$.

(f) Billiard encoding of oriented geodesics. Consider the first stretch of the geodesic β encoded by (1.14) that starts at the point x_0 in $(0, i\infty)$. If $k_0 = 1$, the ball along β reaches the opposite side $(1, i\infty)$ and gets reflected to the third side $(0, 1)$. If $k_0 = 2$, it reaches the opposite side, then returns to the initial side $(0, i\infty)$, and only afterwards gets reflected to $(0, 1)$.

More generally, the ball always spends k_0 unobstructed stretches of its trajectory between $(0, i\infty)$ and $(1, i\infty)$, but then is reflected to $(0, 1)$ either from $(1, i\infty)$ (if k_0 is odd), or from $(0, i\infty)$ (if k_0 is even). We can encode this sequence of stretches by the formal word ∞^{k_0} showing exactly how many times the ball is reflected “in the vicinity” of the pocket $i\infty$, that is, does not cross any of the medians.

A contemplation will convince the reader that this allows one to define an alternative encoding of β by the double infinite word in *three letters*, say a, b, c , serving as names of the vertices $\{0, 1, i\infty\}$.

(g) Kasner’s eras in logarithmic time and doubly infinite continued fractions. Now we will explain, how the double infinite continued fractions enter the Mixmaster formalism when we want to mark the consecutive Kasner eras upon the t -axis, or rather upon the Ω -axis, where $\Omega := -\log \int dt/abc$

In the process of construction, these continued fractions will also come with their enrichments.

We start with fixing a “typical” space–time γ whose evolution with $t \rightarrow +0$ undergoes (approximately) a series of Kasner’s eras described by a continued fraction $[k_0, k_1, k_2, \dots]$, where k_s is the number of Kasner’s cycles within s -th era $[\Omega_s, \Omega_{s+1})$. We have enriched this encoding by introducing parameters u_s which determine the Kasner exponents within the first cycle of the era number s by (1.5). A further enrichment comes with putting these eras on the Ω -axis. According to [KLiKhShSi85], [BoNo73], [Bo85], if one defines the sequence of numbers δ_s from the relations

$$\Omega_{s+1} = [1 + \delta_s k_s (u_s + 1/\{u_s\})]\Omega_s,$$

then complete information about these numbers can be encoded by the extension to the left of our initial continued fraction:

$$[\dots, k_{-1}, k_0, k_1, k_2, \dots] \tag{1.15}$$

in such a way that

$$\delta_s = x_s^+ / (x_s^+ + x_s^-)$$

where

$$x_s^+ = [0, k_s, k_{s+1}, \dots], \quad x_s^- = [0, k_{s-1}, k_{s-2}, \dots]. \tag{1.16}$$

The following result established in [MaMar15] shows that cosmological time can be approximately measured in terms of geodesic length of path of the billiard ball.

1.3. Theorem. *Let a “typical” Bianchi IX Mixmaster Universe be encoded by the double-sided sequence (1.15). Consider also the respective geodesic in H with its enriched encoding (1.14).*

Then we have “asymptotically” as $s \rightarrow \infty$, $s \in \mathbf{Z}_+$:

$$\log \Omega_{2s} / \Omega_0 \simeq 2 \sum_{r=0}^{s-1} \text{dist}(x_{2r}, x_{2r+1}), \tag{1.17}$$

where dist denotes the hyperbolic distance between the consecutive intersection points of the geodesic with sides of the Farey tessellation as in (1.14).

The formula (1.17) shows that the distance measured along a geodesic can be compared to (doubly) logarithmic cosmological time.

During the stretch of *time/geodesic length* which such a geodesic spends in the vicinity of a vertex of Δ , the respective space–time in a certain sense can be approximated by its degenerate version, corresponding to the vertex itself, and this will justify considering below the respective segments of geodesics as the “instanton Kasner eras”.

1.4. Riemannian signature: Bianchi IX models with $SU(2)$ -symmetry.

Consider the $SU(2)$ Bianchi IX model with metric of the form

$$g = F \left(d\mu^2 + \frac{\sigma_1^2}{W_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{W_2^2} + \frac{\sigma_3^2}{W_3^2} \right). \tag{1.18}$$

Here μ is cosmological time, (σ_j) are $SU(2)$ -invariant forms along space-sections with $d\sigma_i = \sigma_j \wedge \sigma_k$ for all cyclic permutations of $(1, 2, 3)$, and F is a conformal factor.

By analogy with the $SO(3)$ -case and metric $dt^2 - a(t)^2 dx^2 - b(t)^2 dy^2 - c(t)^2 dz^2$, we may and will treat W_i (as well as some natural monomials in W_i and F) as $SU(2)$ -scaling factors.

However, contrary to the $SO(3)$ -case, generic solutions of Einstein equations in the $SU(2)$ -case can be written explicitly in terms of elliptic modular functions, whereas their chaotic behaviour along geodesics in the complex half-plane of time is only a reflection of the chaotic behaviour of the respective billiard ball trajectories.

We will use explicit formulas given in [BaKo98], where they were deduced from the basic results of [Hi95]. The central role in them is played by theta-functions depending on the the complex arguments $i\mu \in H$, $z \in \mathbf{C}$, with parameters (p, q) called theta-characteristics:

$$\vartheta[p, q](z, i\mu) := \sum_{m \in \mathbf{Z}} \exp\{-\pi(m+p)^2 \mu + 2\pi i(m+p)(z+q)\}. \quad (1.19)$$

It can be expressed through the theta-function with vanishing characteristics:

$$\vartheta[p, q](z, i\mu) = \exp\{-\pi p^2 \mu + 2\pi i p q\} \cdot \vartheta[0, 0](z + pi\mu + q, i\mu). \quad (1.20)$$

All these functions satisfy classical automorphy identities with respect to the action of $PGL(2, \mathbf{Z})$.

1.5. Theorem. ([To94], [Hi95], [BaKo98].) *Put*

$$\vartheta[p, q] := \vartheta[p, q](0, i\mu) \quad (1.21)$$

and

$$\vartheta_2 := \vartheta[1/2, 0], \quad \vartheta_3 := \vartheta[0, 0], \quad \vartheta_4 := \vartheta[0, 1/2]. \quad (1.22)$$

(A) Consider the following scaling factors as functions of μ with parameters (p, q) :

$$W_1 := \frac{i}{2} \vartheta_3 \vartheta_4 \frac{\frac{\delta}{\delta q} \vartheta[p, q + 1/2]}{e^{\pi i p} \vartheta[p, q]}, \quad W_2 := \frac{i}{2} \vartheta_2 \vartheta_4 \frac{\frac{\delta}{\delta q} \vartheta[p + 1/2, q + 1/2]}{e^{\pi i p} \vartheta[p, q]},$$

$$W_3 := -\frac{1}{2} \vartheta_2 \vartheta_3 \frac{\frac{\delta}{\delta q} \vartheta[p + 1/2, q]}{\vartheta[p, q]}, \quad (1.23)$$

Moreover, define the conformal factor F with non-zero cosmological constant Λ by

$$F := \frac{2}{\pi \Lambda} \frac{W_1 W_2 W_3}{\left(\frac{\delta}{\delta q} \log \vartheta[p, q]\right)^2} \quad (1.24)$$

The metric (1.18) with these scaling factors for real $\mu > 0$ is real and satisfies the Einstein equations if either

$$\Lambda < 0, \quad p \in \mathbf{R}, \quad q \in \frac{1}{2} + i\mathbf{R}, \quad (1.25)$$

or

$$\Lambda > 0, \quad q \in \mathbf{R}, \quad p \in \frac{1}{2} + i\mathbf{R}. \quad (1.26)$$

(B) Consider now a different system of scaling factors

$$\begin{aligned} W'_1 &:= \frac{1}{\mu + q_0} + 2\frac{d}{d\mu} \log \vartheta_2, & W'_2 &:= \frac{1}{\mu + q_0} + 2\frac{d}{d\mu} \log \vartheta_3, \\ W'_3 &:= \frac{1}{\mu + q_0} + 2\frac{d}{d\mu} \log \vartheta_4, \end{aligned} \quad (1.27)$$

and

$$F' := -C(\mu + q_0)^2 W'_1 W'_2 W'_3, \quad (1.28)$$

where $q_0, C \in \mathbf{R}$, $C > 0$.

The metric (1.18) with these scaling factors for real $\mu > 0$ is real and satisfies the Einstein equations with vanishing cosmological constant.

We will now consider values of $i\mu \in \Delta \subset \overline{H}$ in the vicinity of $i\infty$ but not necessarily lying on the imaginary axis. Since we are interested in the instanton analogs of Kasner's solutions, we will collect basic facts about asymptotics of scaling factors for $i\mu \rightarrow i\infty$.

For brevity, we will call a number $r \in \mathbf{R}$ *general*, if $r \notin \mathbf{Z} \cup (1/2 + \mathbf{Z})$.

For such r , denote by $\langle r \rangle \in (-1/2, 0) \cup (0, 1/2)$ such real number that $r + m_0 = \langle r \rangle$ for a certain (unique) $m_0 \in \mathbf{Z}$.

1.6. Theorem. *The scaling factors of the Bianchi IX spaces listed in Theorem 1.5 have the following asymptotics near $\mu = +\infty$:*

(i) For $\Lambda = 0$:

$$W'_1 \sim -\frac{\pi}{2}, \quad W'_2 \sim W'_3 \sim \frac{1}{\mu + q_0}. \quad (1.29)$$

(ii) For $\Lambda < 0$ and general p :

$$\begin{aligned} W_1 &\sim -\pi \langle p \rangle \exp\{\pi i(\langle p \rangle - p)\}, & W_2 &\sim \pm W_3, \\ W_3 &\sim -2\pi i \langle p + 1/2 \rangle \cdot \exp\{\pi i \operatorname{sgn} \langle p \rangle q\} \cdot \exp\{\pi \mu(|\langle p \rangle| - 1/2)\}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

(iii) For $\Lambda > 0$, real q and $p = 1/2 + ip_0, p_0 \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} W_1 &\sim \pi p_0 \tan\{\pi(q - p_0\mu)\} - \frac{1}{2}, & W_2 &\sim -W_3, \\ W_3 &\sim 2\pi p_0 \cdot (\cos \pi(q - p_0\mu))^{-1}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Theorem 1.6 (proved in [MaMar15]) shows that for general members of all solution families from [BaKo98], after eventual sign changes of some W_i 's and outside of the pole singularities on the real time axis, we have asymptotically $W_2 = W_3$, $W_1 \neq W_2$.

In the next section, we will show that precisely such a condition allows one to quantize the respective geometric picture in terms of Connes–Landi ([CoLa01]). This gives additional substance to our vision that chaotic Mixmaster evolution along hyperbolic geodesics reflects a certain “dequantization” of the hot quantum early Universe.

1.7. Gravitational instantons and Painlevé VI. Hitchin’s classification of gravitational instantons that led to Theorem 1.5 was based upon the reduction of the relevant Einstein equations to a Painlevé VI equation. We will briefly recall basics facts about them; see [Ta01] for a more general context.

Equations of the type Painlevé VI form a four–parametric family. Denote parameters $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, and the independent variable by t . The corresponding equation for a function $X(t)$ looks as follows:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dt^2} = & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{X} + \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X-t} \right) \left(\frac{dX}{dt} \right)^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{X-t} \right) \frac{dX}{dt} + \\ & + \frac{X(X-1)(X-t)}{t^2(t-1)^2} \left[\alpha + \beta \frac{t}{X^2} + \gamma \frac{t-1}{(X-1)^2} + \delta \frac{t(t-1)}{(X-t)^2} \right]. \end{aligned}$$

Gravitational instantons correspond to the case

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8} \right).$$

Solutions in elliptic functions of this equation describe Bianchi IX space–times with $SU(2)$ –symmetry: see [Hi95].

One more interesting case is $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \left(\frac{9}{2}, 0, 0, \frac{1}{2} \right)$. According to B. Dubrovin, a specific solution of this equation describes “the mirror of \mathbf{P}^2 ” in a general context of Mirror Symmetry.

In 1907, R. Fuchs has rewritten PVI in the form

$$\begin{aligned} t(1-t) \left[t(1-t) \frac{d^2}{dt^2} + (1-2t) \frac{d}{dt} - \frac{1}{4} \right] \int_{\infty}^{(X,Y)} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-t)}} = \\ = \alpha Y + \beta \frac{tY}{X^2} + \gamma \frac{(t-1)Y}{(X-1)^2} + \left(\delta - \frac{1}{2} \right) \frac{t(t-1)Y}{(X-t)^2} \end{aligned} \quad (1.32)$$

Here he enhanced $X := X(t)$ to $(X, Y) := (X(t), Y(t))$ treating the latter pair as a section $P := (X(t), Y(t))$ of the generic elliptic curve $E = E(t) : Y^2 = X(X-1)(X-t)$.

Up to a simple change of notations, the abelian integral $\int_{\infty}^{(X,Y)}$ in (1.32) can be directly identified with the abelian integral $\int_0^{R(t)}$ in (1.3) so that this integral is a version of cosmological time. The meaning of the right hand side of (1.32) was clarified in my paper [Ma96]. After having noticed that Painlevé VI can be written on any one–dimensional family of elliptic curves (its dependent variable becoming a (multi)section of such a family), I have applied this remark to the analytic family $E_{\tau} := \mathbf{C}/(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau) \mapsto \tau \in H$. Denoting by z a fixed coordinate on \mathbf{C} , we can rewrite (1.32) in the form

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \sum_{j=0}^3 \alpha_j \wp_z \left(z + \frac{T_j}{2}, \tau \right) \quad (1.33)$$

Here $(\alpha_0, \dots, \alpha_3) := (\alpha, -\beta, \gamma, \frac{1}{2} - \delta)$, $(T_0, T_1, T_2, T_3) := (0, 1, \tau, 1 + \tau)$, and

$$\wp(z, \tau) := \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \left(\frac{1}{(z - m\tau - n)^2} - \frac{1}{(m\tau + n)^2} \right).$$

Moreover, equation of the generic elliptic curve becomes

$$\wp_z(z, \tau)^2 = 4(\wp(z, \tau) - e_1(\tau))(\wp(z, \tau) - e_2(\tau))(\wp(z, \tau) - e_3(\tau))$$

where

$$e_i(\tau) = \wp\left(\frac{T_i}{2}, \tau\right),$$

so that $e_1 + e_2 + e_3 = 0$.

Since $PGL(2, \mathbf{Z})$ acts on the total space of this family, the “time variable” τ (an abelian integral along closed path on a curve) can be restricted to the fundamental domain of this group or its finite index subgroup, and this leads to the hyperbolic billiard picture.

2 Quantum Big Bang?

2.1. Canonical quantisation of the billiard system and Maass forms.

The most straightforward way to produce from the Mixmaster chaotic system its quantum version consists in applying canonical quantisation to the billiard ball moving in one of the version of hyperbolic billiard table discussed above.

This immediately leads to the consideration of Maass wave functions: eigenvectors Ψ of the Laplace–Beltrami operator on the hyperbolic half–plane, invariant with respect to an appropriate subgroup of the (extended) modular group. They play now role of quantum wave–functions of early hot Universe.

We refer to [Le13], sec. VI and VII, for a detailed discussion of this quantisation scheme and relevant references. See also [Fu86].

Below we will discuss a different quantisation scheme, developed in the framework of non commutative geometry (cf. [CoLa01]). We will then connect it with the complex geometry of gravitational instantons, described in subsections 1.4–1.6 above. This was done in our article [MaMar15].

2.2. Theta deformations. In Section 5 of [MaMar14] we showed that the gluing of space–times across the singularity using an algebro–geometric blowup can be made compatible with the idea of spacetime coordinates becoming non–commutative in a neighborhood of the initial singularity where quantum gravity effects begin to dominate.

This compatibility is described there in terms of Connes–Landi theta deformations ([CoLa01]) and Cirio–Landi–Szabo toric deformations ([CiLaSza11–13]) of Grassmannians.

It turns out that the Bianchi IX models with $SU(2)$ –symmetry can be made compatible with the hypothesis of noncommutativity at the Planck scale, using isospectral theta deformations.

The metrics on the S^3 sections, in this case, are only left $SU(2)$ –invariant. It turns out that among all the $SU(2)$ Bianchi IX spacetime, the only ones that admit isospectral theta–deformations of their spatial S^3 –sections are those where the metric tensor

$$g = w_1 w_2 w_3 d\mu^2 + \frac{w_2 w_3}{w_1} \sigma_1^2 + \frac{w_1 w_3}{w_2} \sigma_2^2 + \frac{w_1 w_2}{w_3} \sigma_3^2 \quad (2.2)$$

is of the special form satisfying $w_1 \neq w_2 = w_3$ (the two directions σ_2 and σ_3 have equal magnitude). In these metrics, the S^3 sections are Berger spheres. This class includes the general Taub-NUT family ([Taub51], [NUT63]), and the Eguchi–Hanson metrics ([EgHa79a], [EgHa79b]). The theta-deformations are obtained, as in the case of the deformations S^3_θ of [CoLa01] of the round 3-sphere, by deforming all the tori of the Hopf fibration to noncommutative tori.

In other words, a Bianchi IX Euclidean spacetime X with $SU(2)$ -symmetry admits a noncommutative theta-deformation X_θ , obtained by deforming the tori of the Hopf fibration of each spacial section S^3 to noncommutative tori, if and only if its metric has the $SU(2) \times U(1)$ -symmetric form

$$g = w_1 w_3^2 d\mu^2 + \frac{w_3^2}{w_1} \sigma_1^2 + w_1 (\sigma_2^2 + \sigma_3^2). \quad (2.3)$$

(see [MaMar15], Proposition 4.2).

This is in stark contrast with the situation described in [EsMar13], where (Lorentzian and Euclidean) Mixmaster cosmologies of the form

$$\mp dt^2 + a(t)^2 dx^2 + b(t)^2 dy^2 + c(t)^2 dz^2$$

were considered, with T^3 -spatial sections, which always admit isospectral theta-deformations (see also [vSuij04], [Mar08]).

We have recalled in the previous section how the general self-dual solutions (with $w_1 \neq w_2 \neq w_3$) can be written explicitly in terms of theta constants [BaKo98], and are obtained from a Darboux–Halphen type system [PeVa12], [Tak92]. In the case of the family of Bianchi IX models with $SU(2) \times U(1)$ -symmetry, this system has algebraic solutions that give

$$w_2 = w_3 = \frac{1}{\mu - \mu_0}, \quad w_1 = \frac{\mu - \mu_*}{(\mu - \mu_0)^2}, \quad (2.4)$$

with singularities at μ_* (curvature singularity), μ_0 (Taubian infinity) and ∞ (nut). The condition $\mu_* < \mu_0$ avoids naked singularities, by hiding the curvature singularity at μ_* behind the Taubian infinity, see the discussion in Section 5.2 of [PeVa12].

Consider the operator

$$D_B = -i \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{\lambda} X_1 & X_2 + iX_3 \\ X_2 - iX_3 & -\frac{1}{\lambda} X_1 \end{array} \right) + \frac{\lambda^2 + 2}{2\lambda}, \quad (2.5)$$

where $\{X_1, X_2, X_3\}$ constitute a basis of the Lie algebra orthogonal for the bi-invariant metric. Assume moreover that the left-invariant metric on S^3 is diagonal in this basis, with eigenvalues $\{w^2/w_1, w_1, w_1\}$, with $w = w_2 = w_3$ and $\lambda = w/w_1$, and where the w_i are as in (4.4). Consider also the operator

$$D = \frac{1}{w_1^{1/2} w} \left(\gamma^0 \left(\frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{w}}{w} + \frac{1}{2} \frac{\dot{w}_1}{w_1} \right) \right) + w_1 D_B \Big|_{\lambda = \frac{w}{w_1}} \right). \quad (2.6)$$

2.3. Proposition. *The operators D of (2.6) give Dirac operators for isospectral theta deformations of the $SU(2) \times U(1)$ -symmetric space-times.*

As in [EsMar13], the Dirac operator of Proposition 2.3 can be seen as involving an anisotropic Hubble parameter H . In the case of the metrics of [EsMar13] this was of the form

$$H = \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right)$$

with a, b, c the scaling factors in (2.3).

In the case of the $SU(2)$ Bianchi IX models, the anisotropic Hubble parameter is again of the form $H = \frac{1}{3}(H_1 + H_2 + H_3)$, where now the H_i correspond to the three directions of the vectors dual to the $SU(2)$ -forms σ_i in (2.2). For a metric of the form (2.3), or equivalently

$$g = uw d\mu^2 + u^2 \lambda^2 \sigma_1^2 + u^2 \sigma_2^2 + u^2 \sigma_3^2,$$

we take the anisotropic Hubble parameter to be

$$H = \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{u}\lambda + u\dot{\lambda}}{u\lambda} + 2\frac{\dot{u}}{u} \right) = \frac{1}{3} \left(3\frac{\dot{u}}{u} + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \right),$$

where

$$\frac{\dot{u}}{u} = \frac{1}{2} \frac{\dot{w}_1}{w_1}, \quad \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \frac{\dot{w}}{w} - \frac{\dot{w}_1}{w_1},$$

so that

$$H = \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{w}}{w} + \frac{1}{2} \frac{\dot{w}_1}{w_1} \right),$$

so that we can write the 4-dimensional Dirac operator in the form

$$D = \gamma^0 \frac{1}{uw} \left(\frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{3}{2} H \right) + D_B,$$

where $D_B = (w_1^{1/2}/w) D_B|_{\lambda=\frac{w}{w_1}}$ is the Dirac operator on the spatial sections

S^3 with the left $SU(2)$ -invariant metric.

Notice that in the construction above, we have considered the same modulus θ for the noncommutative deformation of all the spatial sections S^3 of the Bianchi IX spacetime, but one could also consider a more general situation where the parameter θ of the deformation is itself a function of the cosmological time μ .

This would allow the dependence of the noncommutativity parameter θ on the energy scale (or on the cosmological timeline), with $\theta = 0$ away from the singularity where classical gravity dominates and noncommutativity only appearing near the singularity. Since a non-constant, continuously varying parameter θ crosses rational and irrational values, this would give rise to a Hofstadter butterfly type picture, with both commutativity (up to Morita equivalence, as in the rational noncommutative tori) and true noncommutativity (irrational noncommutative tori), cf. also [MaMar08].

Another interesting aspect of these noncommutative deformations is the fact that, when we consider a geodesic in the upper half plane encoding Kasner eras in a mixmaster dynamics, the points along the geodesic also determine a family of complex structures on the noncommutative tori T_θ^2 of the theta-deformation of the respective spatial section.

References

- [Ar24] E. Artin. *Ein mechanisches System mit quasi-ergodischen Bahnen*. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 3 (1924), no. 1, pp. 170–175.
- [AU] The Accelerating Universe. Scientific Background on the Nobel Prize in Physics 2011. http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2011/advanced-physicsprize2011.pdf
- [BaKo98] M. V. Babich, D. A. Korotkin. *Self-dual $SU(2)$ -Invariant Einstein Metrics and Modular Dependence of Theta-Functions*. Lett. Math. Phys. 46 (1998), 323–337. arXiv:gr-qc/9810025v2
- [Bal13] A. Balbi. *Cosmology and time*. arXiv:1304.3823 [physics.hist-ph]
- [Bo85] O.I. Bogoyavlensky. *Methods in the qualitative theory of dynamical systems in astrophysics and gas dynamics*. Springer Series in Soviet Mathematics. Springer Verlag, Berlin, 1985. ix+301 pp.
- [BoNo73] O.I. Bogoyavlenskii, S. P. Novikov. *Singularities of the cosmological model of the Bianchi IX type according to the qualitative theory of differential equations*. Zh. Eksp. Teor. Fiz. 64 (1973), pp. 1475–1494.
- [CiLaSza11] L.S. Cirio, G. Landi, R.J. Szabo. *Algebraic deformations of toric varieties II: noncommutative instantons*. Adv. Theor. Math. Phys. 15 (2011), no. 6, 1817–1907.
- [CiLaSza12] L.S. Cirio, G. Landi, R.J. Szabo. *Instantons and vortices on non-commutative toric varieties*. arXiv:1212.3469.
- [CiLaSza13] L.S. Cirio, G. Landi, R.J. Szabo. *Algebraic deformations of toric varieties I. General constructions*. Adv. Math. 246 (2013), 33–88.
- [CoLa01] A. Connes, G. Landi. *Noncommutative manifolds, the instanton algebra and isospectral deformations*. Comm. Math. Phys. 221 (2001), no. 1, 141–159.
- [EgHa79a] T. Eguchi, A.J. Hanson, *Self-dual solutions to Euclidean Gravity*, Annals of Physics, 120 (1979), 82–106.
- [EgHa79b] T. Eguchi, A.J. Hanson, *Gravitational Instantons*, Gen. Relativity Gravitation 11, No 5 (1979) , 315–320.
- [EsMar13] Ch. Estrada, M. Marcolli. *Noncommutative Mixmaster Cosmologies*. Int. J. of Geom. Methods in Modern Phys., Vol. 10, No. 1, 2013.

- [Fu86] T. Furusawa. *Quantum chaos of Mixmaster Universe*. Progr. Theor. Phys., Vol. 75, No. 1 (1986), pp. 59–67.
- [Hi95] N. J. Hitchin. *Twistor spaces, Einstein metrics and isomonodromic deformations*. J. Diff. Geo., Vol. 42, No. 1 (1995), 30–112.
- [KLiKhShSi85] I. M. Khalatnikov, E. M. Lifshitz, K. M. Khanin, L. N. Shchur, and Ya. G. Sinai. *On the stochasticity in relativistic cosmology*. Journ. Stat. Phys., Vol.38, Nos. 1/2 (1985), pp. 97–114.
- [Lam15] D. Lambert. *The atom of the universe*. Copernicus Center Press, Kraków, 2015.
- [Lam07] D. Lambert. *L'itinéraire spirituel de Georges Lemaitre*. Éditions Lessius, Bruxelles, 2007.
- [Le13] O. M. Lecian. *Reflections on the hyperbolic plane*. International Journal of Modern Physics D Vol. 22, No. 14 (2013), 1350085 (53 pages) DOI: 10.1142/S0218271813500855. arXiv:1303.6343 [gr-qc]
- [LuCh13] L.M.Lugo, P.A. Chauvet. *BKL method in the Bianchi IX universe model revisited*. Appl. Phys. Res., Vol. 5, No. 6 (2013), pp. 107–117.
- [Ma96] Yu. Manin. *Sixth Painlevé equation, universal elliptic curve, and mirror of \mathbf{P}^2* . In: geometry of Differential Equations, ed. by A. Khovanskii, A. Varchenko, V. Vassiliev. Amer. Math. Soc. Transl. (2), vol. 186, pp. 131–151. Preprint alg-geom/9605010.
- [MaMar02] Yu. Manin, M. Marcolli. *Continued fractions, modular symbols, and non-commutative geometry*. Selecta math., new ser. 8 (2002), 475–521; arXiv:math.NT/0102006
- [MaMar08] Yu. Manin, M. Marcolli. *Modular shadows*. In: Modular forms on Schiermonnikoog, ed. by Bas Edixhoven, G. van der Geer, B. Moonen, Cambridge UP, 2008, pp. 189–238. arXiv:math.NT/0703718
- [MaMar14] Yu.I. Manin, M. Marcolli. *Big Bang, Blow Up, and Modular Curves: Algebraic Geometry in Cosmology*. SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 10 (2014), Paper 073, 20 pp. Preprint arXiv:1402.2158
- [MaMar15] Yu.I. Manin, M. Marcolli. *Symbolic dynamics, modular curves, and Bianchi IX cosmologies*. Preprint arXiv:1504.04005 [gr-qc]
- [Mar08] M. Marcolli. *Solvmanifolds and noncommutative tori with real multiplication*. Commun. Number Theory and Physics, Vol. 2 (2008) No. 2, 421–476.
- [May87] D. Mayer. *Relaxation properties of the Mixmaster Universe*. Phys. Lett. A, Vol. 121, Nos. 8–9, 1987, pp. 390–394.
- [Ne13] E. T. Newman. *A fundamental solution to the CCC equations*. arXiv:1309.7271 [gr-qc]
- [NUT63] E. Newman, L. Tamburino, T. Unti, *Empty-space generalization of the Schwarzschild metric*, Journ. Math. Phys. 4 (1963), 915–923.

- [OIPe05] K. A. Olive, J. A. Peacock. *Big-Bang Cosmology*. Online publication: <http://pdg.lbl.gov/2005/reviews/bigbangrpp.pdf>
- [Pe64] R. Penrose. *Conformal treatment of infinity*. In: Relativity, groups and topology. Ed. by B. deWitt and C. deWitt, Gordon and Breach, 1964, pp. 565–584.
- [Pe79] R. Penrose (1979). *Singularities and Time-Asymmetry*. In “General Relativity: An Einstein Centenary Survey”, (S. W. Hawking and W. Israel, Eds.), Cambridge University Press, 1979, pp. 581–638.
- [Pe02] R. Penrose. *Twistor geometry of conformal infinity*. In: The conformal structure of space–time, ed. by J. Frauendiener, H. Friedrich, LN in Phys. 604, 2002, pp. 113–121.
- [Pe10] R. Penrose. *Cycles of time. An Extraordinary New View of the Universe*. Vintage Books, 2010.
- [PeVa12] P.M. Petropoulos, P. Vanhove, *Gravity, strings, modular and quasi-modular forms*, Ann. Math. Blaise Pascal 19, No. 2 (2012), 379–430.
- [Se85] C. Series. *The modular surface and continued fractions*. J. London MS, Vol. 2, no. 31, 1985, pp. 69–80.
- [Ta01] K. Takasaki. *Painlevé–Calogero correspondence revisited*. Journ. Math. Phys., Vol. 42, No. 3 (2001), pp. 1443–1473.
- [Taub51] A. H. Taub. *Empty space–times admitting a three parameter group of motions*. Annals of Math. 53 (1951), pp. 472–490.
- [To94] K. P. Tod. *Self–dual Einstein metrics from the Painlevé VI equation*. Phys. Lett. A 190 (1994), 221–224.
- [To13] P. Tod. *Penrose’s circles in the CMB and a test of inflation..* Gen. Rel. and Gravitation, vol. 44, issue 11, (2013), pp. 2933–2938. arXiv: 1107.1421 [gr-qc]
- [vSuij04] W. van Suijlekom. *The noncommutative Lorentzian cylinder as an isospectral deformation*. J. Math. Phys. 45 (2004), no. 1, 537–556.
- [We77] S. Weinberg. *The First Three Minutes. A Modern View of the Origin of the Universe*. Bantam Book, 1977.

BILLIARDS, INVISIBILITY, AND PERFECTLY STREAMLINING OBJECTS

*G. Galperin*¹, *A. Plakhov*²

1 Introduction

In this paper we shall describe recent applications of billiards in aerodynamics and optics. More precisely, we shall explain how to construct perfectly streamlining bodies in the framework of Newtonian aerodynamics and invisible objects in geometric optics. The methods we shall use are quite elementary and accessible to students of the high school; they include focal properties of curves of the second order and unfolding of a billiard trajectory.

2 Perfectly streamlining bodies in aerodynamics

To start with, let us consider a rigid body moving through a rarefied medium of point particles. The medium has zero absolute temperature; this means that the particles are initially at rest. When hitting the body, particles are reflected in the perfectly elastic manner. The medium is so rarefied that particles never hit each other.

The (generalized) Newton aerodynamic problem consists in finding the best streamlining body from a given class of bodies. This means that the force of resistance exerted by the medium on the body is minimal in this class of bodies. This problem was solved by Newton himself in the class of convex axially symmetric bodies with fixed length and width [13], and by several authors in various classes of bodies, provided that each particle hits the body at most once [2–9, 11, 12].

In a reference system connected with the body one observes a flow of medium particles with equal velocities incident on the body at rest. Choose the reference system in such a way that the velocity of the flow is $(0, 0, -1)$. If the body surface turned to the flow is the graph of a function $z = u(x, y)$ and each particle hits the body only once, the projection of the resistance force of the body on the z -axis $R(u)$ (which will be referred to as *resistance* in the

¹ Eastern Illinois University, USA; ggalperin@eiu.edu

² Aveiro University, Portugal; plakhov@ua.pt

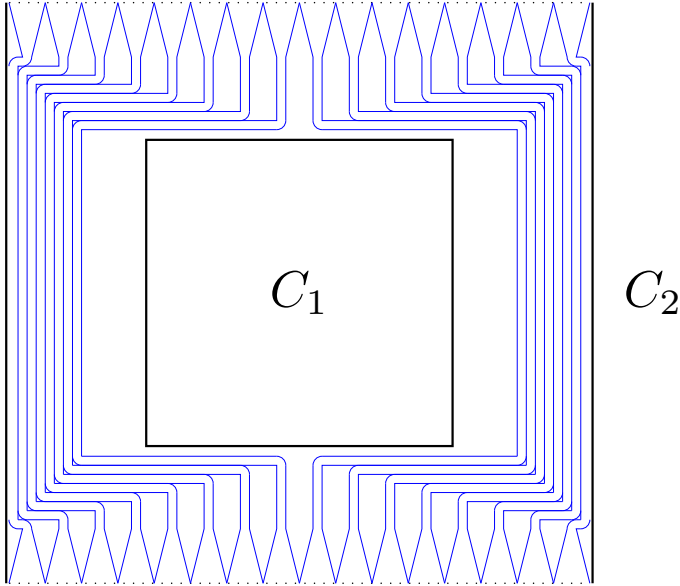


Fig. 1: Two concentric squares with a built-in channel system.

sequel) can be written down in a comfortable analytical form

$$F(u) = \iint \frac{1}{1 + |\nabla u(x, y)|^2} dx dy.$$

If one allows multiple reflections of particles, the formula of resistance is more implicit. Let $B \subset \mathbb{R}^3$ be the body under consideration, and let the particle of the flow that moves according to $(x, y, -t)$ for t sufficiently small, after several reflections from the body move freely with the velocity $v_B(x, y) = (v_B^x(x, y), v_B^y(x, y), v_B^z(x, y)) \in S^2$. The resistance equals

$$R(B) = \frac{1}{2} \iint (1 + v_B^z(x, y)) dx dy.$$

Note that in the particular case when the condition of single reflection is satisfied and the front part of the body surface is given by $z = u(x, y)$, one has $F(u) = R(B)$.

If multiple reflections of the particles are allowed, and therefore the theory of billiards is applicable, one comes to some very surprising conclusions. First, in the class of bodies that contain a bounded convex body C_1 and are contained in another bounded convex body C_2 (where $C_1 \subset C_2$ and $\partial C_1 \cap C_2 = \emptyset$) the infimum of resistance is zero [15]. In other words, the resistance of a convex body can be made as small as we please by small perturbation of the body near its boundary. Let us illustrate this in the case when C_1 and C_2 are rectangular parallelepipeds with the edges parallel to the coordinate axes.

[The construction with two rectangles follows. An explanation of motion in channels should be given. The 3D construction is obtained by making a "sandwich" whose layers are as in the 2D construction.]

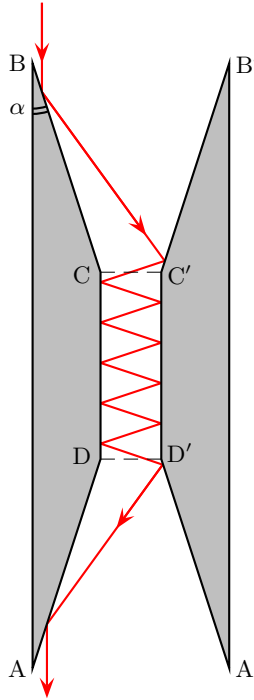


Fig. 2: Union of two trapezoids.

Let us now consider modification of this construction. Consider a rectangle with a single built-in channel (see Fig. 2). As first conjectured by E. Lakshatanov, under a certain condition (to be specified below) on the parameters of the figure, the final velocity of a particle of the parallel flow will always be equal to the initial velocity of the flow (vertical in Fig. 2).

Indeed, let E be the point of intersection of the lines BC and $B'C'$, and let $\beta = \angle BOB'$. Consider the broken line formed by the segment CC' and its rotations by the angles $\beta, -\beta, 2\beta, -2\beta, \dots$ (while the modulus of the angle is smaller than π), and assume that the lines AB and $A'B'$ touch this broken line (see Fig. 3). The initial velocity of the particle is $v = (0, -1)$; let us prove that its final velocity is also v .

[The proof (based on unfolding of a billiard trajectory) follows.]

It follows that the union of two trapezoids in Fig. 2, when moving in the vertical direction, has zero resistance. Now it is easy to obtain 3D bodies with zero resistance. First, one can rotate the union of trapezoids about its vertical symmetry axis. Second, one can translate it in the direction orthogonal to the plane of the figure.

Let us further simplify the construction. Let C and D coincide and $\alpha = \pi/6$ in Fig. 2; then we obtain a union of two triangles, as shown in Fig. 4. This is probably the simplest figure of zero resistance.

Remarkably, we have found perfectly streamlined bodies. This means that they can move perpetually in a homogeneous rarefied medium without slowing down the velocity. However, the medium will resist to attempts of maneuvering.

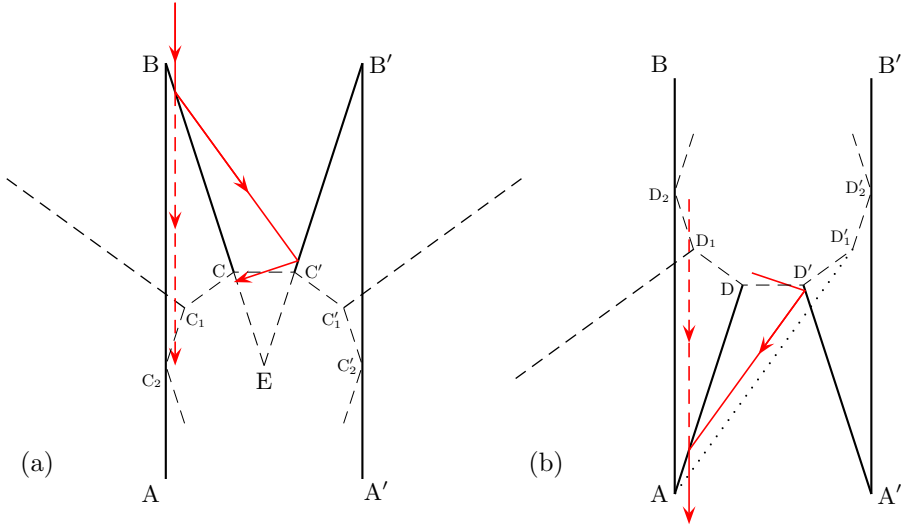


Fig. 3: Unfolding of a billiard trajectory.

Additionally, the resistance is nonzero, if the medium is not homogeneous. For instance, the body will slow down when getting into a homogeneous cloud, and will recover its original velocity when going away.

3 Invisible objects

The ideas of the previous section can be used in geometric optics when constructing invisible objects. Indeed, put together two bodies of zero resistance mutually symmetric with respect to a plane orthogonal to the direction of the flow; as a result we will obtain an object invisible in this direction (see, e.g., Fig. 5).

[The explanation.]

Now when we have constructed an object invisible in a direction, it is natural to ask, if there exist objects invisible from a point. They really exist, and the underlying construction is based on focal properties of curves of the second order.

The following geometrical statement plays an important role in problems of Newtonian aerodynamics [1, 14]. It allows one to build "invisible object" like the curvilinear triangle ABC shown in fig. 9 at the end of this paper. In this note we are going to prove this statement.

Theorem. *Let F_1F_2C be a right triangle with the right angle at F_2 , and let \mathcal{E} and \mathcal{H} be the confocal, with foci at F_1 and F_2 , ellipse and hyperbola through C . (We consider only the branch of the hyperbola \mathcal{H} that contains C .) Consider a ray with the vertex at F_1 , which intersects the ellipse \mathcal{E} and the branch of the hyperbola \mathcal{H} at some points A and B . Then the segment F_2C forms equal angles with the segments F_2A and F_2B : $\alpha = \beta$ (see Fig. 6).*

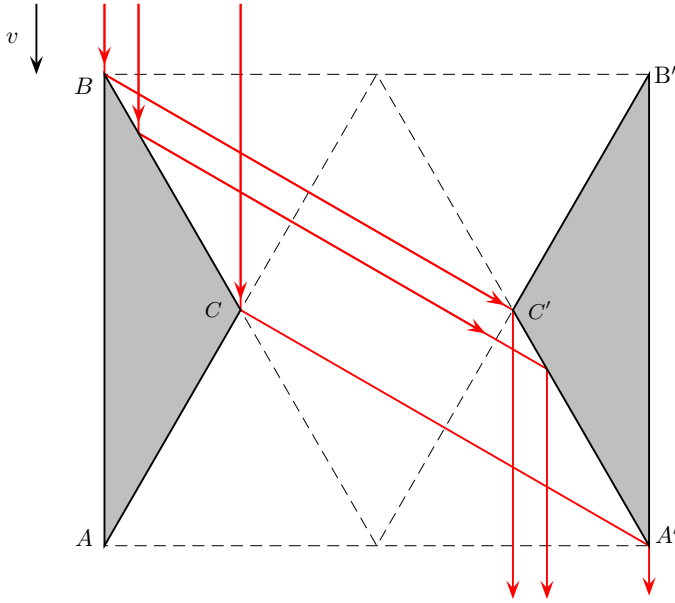


Fig. 4: A body of zero resistance: basic construction.

Notice the following property, which is a direct consequence of the theorem.

Corollary. *Let A_1 be the point of intersection of the ray F_2A with the branch of the hyperbola \mathcal{H} , and let the ray F_1A_1 intersect the ellipse at B_1 (Fig. 6). Then, according to the theorem, the points B , B_1 , and F_2 lie on the same straight line. In other words, each of the triples, F_1AB , $F_1A_1B_1$, F_2A_1A , and F_2B_1B , is collinear.*

The proof of the theorem makes use of the following characteristic property of an angle bisector in a triangle.

Lemma. *Consider a triangle ABC and a segment BD joining the vertex B with a point D lying on the opposite side AC . Denote $a_1 = AB$, $a_2 = BC$, $b_1 = AD$, $b_2 = DC$, and $f = BD$ (see Fig. 7). The segment BD is the bisector of the angle B , if and only if $(a_1 + b_1)(a_2 - b_2) = f^2$.*

Proof. Let $f = BD$ be the bisector of the angle B to the side AC . Let us prove the following relations on the values a_1 , a_2 , b_1 , b_2 , and f :

1. $a_1/a_2 = b_1/b_2$;
2. $a_1a_2 - b_1b_2 = f^2$;
3. $(a_1 + b_1)(a_2 - b_2) = f^2$.

The equalities 1 and 2 are well known; each of them is a characteristic property of triangle bisector as well.

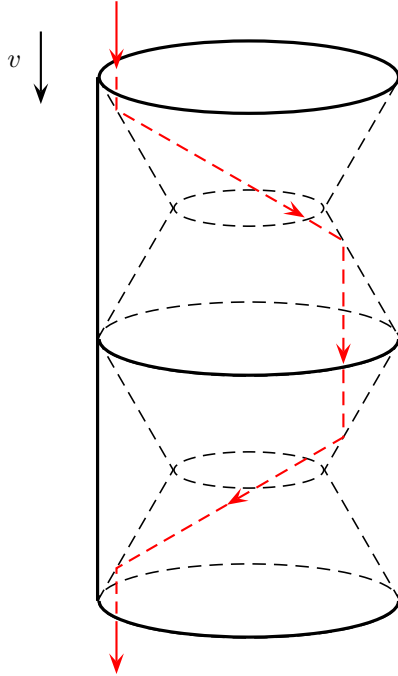


Fig. 5: A body invisible in the direction v . It is obtained by taking 4 truncated cones out of the cylinder.

The first property is a consequence of the following formula that compares areas of triangles:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{1}{2} a_1 f \sin \alpha}{\frac{1}{2} a_2 f \sin \alpha} = \frac{S_{ABD}}{S_{BCD}} = \frac{\frac{1}{2} b_1 h}{\frac{1}{2} b_2 h} = \frac{b_1}{b_2}, \tag{1}$$

where $\alpha = \angle ABD = \angle CBD$, and h is the height put from the vertex B on the side AC .

The second property of the bisector is based on the notion of "degree" of a point relative to a circumference. Let us circumscribe the circumference ω around the triangle ABC . Take a chord through a point D inside a circumference ω ; this chord is divided by D into two segments. The product of the lengths of these segments is called the *degree of the point D* (all such products are equal for the given point D). Denoting $DE = g$, we get for the point D that $b_1 b_2 = fg$ (Fig. 7).

Note that $\triangle ABE$ is similar to $\triangle DBC$ by two angles:

$$\angle ABE = \angle DBC = \alpha \quad \text{and} \quad \angle AEB = \angle ACB = \frac{1}{2} \widehat{AB}.$$

Therefore

$$\frac{a_1}{f + g} = \frac{f}{a_2},$$

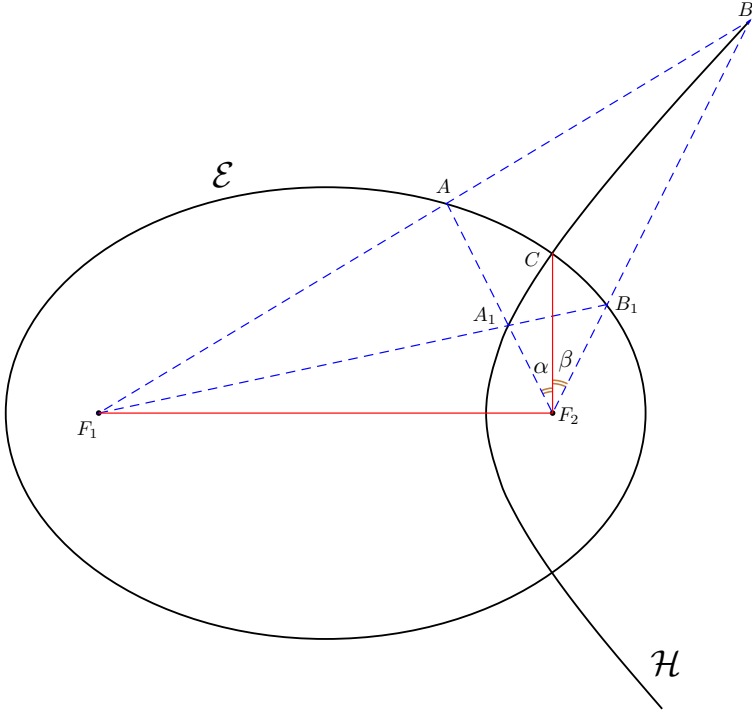


Fig. 6: $\alpha = \beta$.

whence

$$a_1 a_2 = f^2 + fg \Rightarrow f^2 = a_1 a_2 - fg = a_1 a_2 - b_1 b_2,$$

Q.E.D.

Let us now prove that the bisector f satisfies the equality 3, and vice versa, a segment BD satisfying this equality is the bisector. Notice that we are unaware of any mentioning of this property in the literature.

One easily sees that the algebraic relations 1, 2, and 3 are "linearly dependent": any two of them imply the third one. Therefore the properties 1 and 2 of the bisector imply the direct statement: the bisector f satisfies the property 3.

In order to derive the inverse statement, we need to apply the sine rule and some trigonometry. Denote $\alpha = \angle ABD$, $\beta = \angle CBD$, and $\gamma = \angle BDC$ (see Fig. 7 (b)). We are going to prove the equality $\alpha = \beta$. Applying the sine rule to $\triangle ABD$, we have

$$\frac{a_1}{\sin \gamma} = \frac{b_1}{\sin \alpha} = \frac{f}{\sin(\gamma - \alpha)},$$

and applying the sine rule to $\triangle BDC$, we have

$$\frac{a_2}{\sin \gamma} = \frac{b_2}{\sin \beta} = \frac{f}{\sin(\gamma + \beta)}.$$

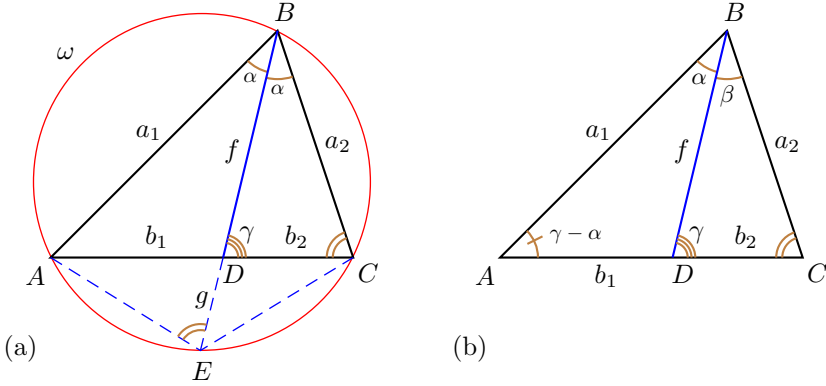


Fig. 7: The proof of the direct (a) and inverse (b) statements on the bisector.

This implies that

$$a_1 + b_1 = \frac{f}{\sin(\gamma - \alpha)} (\sin \gamma + \sin \alpha) = f \frac{\sin \frac{\gamma + \alpha}{2}}{\sin \frac{\gamma - \alpha}{2}},$$

$$a_2 - b_2 = \frac{f}{\sin(\gamma + \beta)} (\sin \gamma - \sin \beta) = f \frac{\sin \frac{\gamma - \beta}{2}}{\sin \frac{\gamma + \beta}{2}},$$

and using the condition 3, one gets

$$f^2 \frac{\sin \frac{\gamma + \alpha}{2} \sin \frac{\gamma - \beta}{2}}{\sin \frac{\gamma - \alpha}{2} \sin \frac{\gamma + \beta}{2}} = f^2,$$

whence

$$\sin \frac{\gamma + \alpha}{2} \sin \frac{\gamma - \beta}{2} = \sin \frac{\gamma - \alpha}{2} \sin \frac{\gamma + \beta}{2},$$

$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} - \cos \left(\gamma + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \cos \frac{\alpha + \beta}{2} - \cos \left(\gamma - \frac{\alpha - \beta}{2} \right),$$

$$\cos \left(\gamma + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \cos \left(\gamma - \frac{\alpha - \beta}{2} \right).$$

The last equation and the conditions $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$ imply that $\alpha = \beta$, Q.E.D. \square

Let us now proceed to the proof of the theorem.

Extend the segment BF_2 until the second intersection with the ellipse at a point A' . Denote

$$f = F_1F_2, \quad c = F_2C, \quad a_1 = F_1A', \quad b_1 = F_2A', \quad a_2 = F_1B \quad \text{and} \quad b_2 = F_2B$$

(see Fig. 8). Let the second point of intersection of the ellipse with the branch

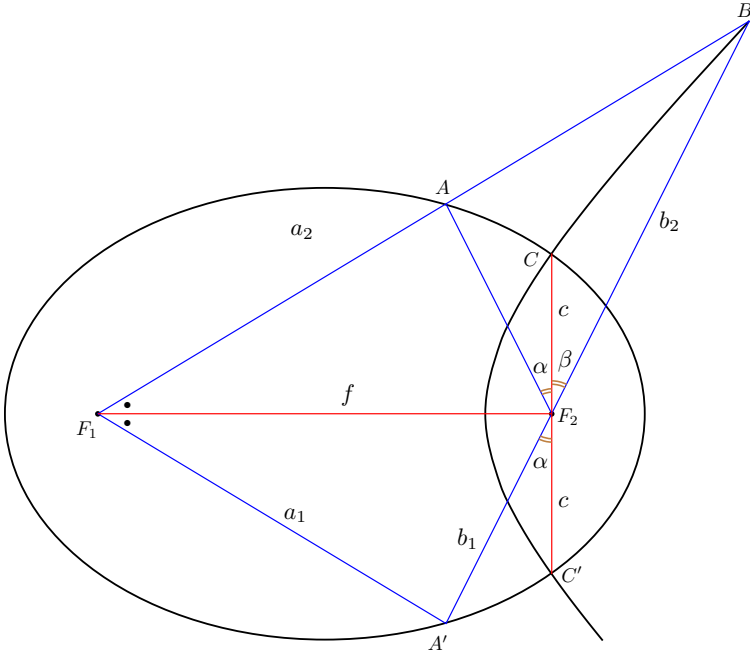


Fig. 8: Auxiliary construction.

of the hyperbola \mathcal{H} be denoted by C' . By the focal property of the ellipse, one has the equality

$$F_1A' + F_2A' = F_1C' + F_2C',$$

that is,

$$a_1 + b_1 = \sqrt{f^2 + c^2} + c. \quad (2)$$

Further, by the focal property of the hyperbola we have

$$F_1B - F_2B = F_1C - F_2C,$$

that is,

$$a_2 - b_2 = \sqrt{f^2 + c^2} - c. \quad (3)$$

Multiplying the left hand sides and the right hand sides of (2) and (3), one gets

$$(a_1 + b_1)(a_2 - b_2) = f^2,$$

and taking into account the lemma, one concludes that F_1F_2 is the bisector of the angle F_1 in the triangle $A'F_1B$. In turn, this means that A' is symmetric to A with respect to the straight line F_1F_2 , and by symmetry one has

$$\angle AF_2C = \angle A'F_2C'. \quad (4)$$

On the other hand, the angles $\angle BF_2C$ and $\angle A'F_2C'$ are vertical, and therefore, are equal:

$$\angle BF_2C = \angle A'F_2C'. \quad (5)$$

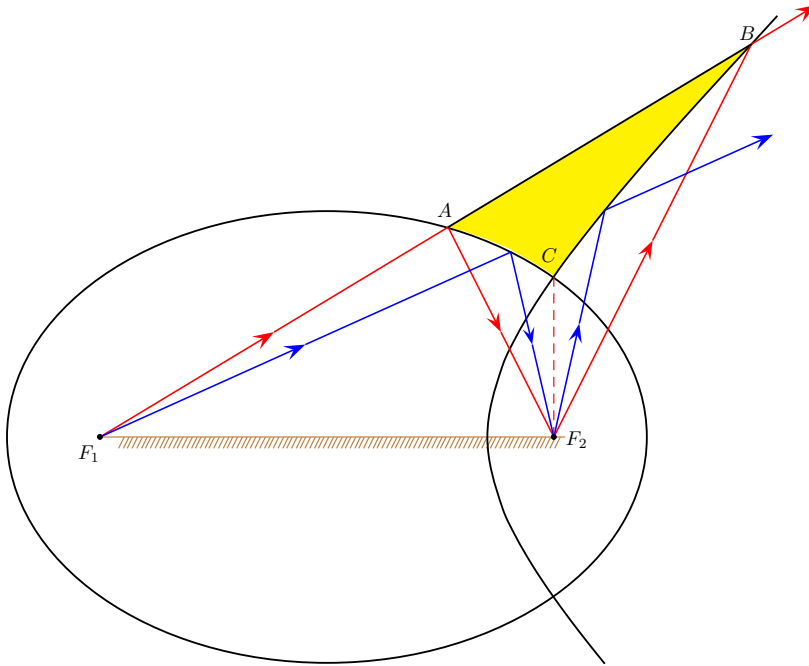


Fig. 9: The curvilinear triangle ABC is invisible from the focus F_1 : all the rays of light emanated from F_1 go round the obstacle ACB in such a way, as if it was absent at all.

The equations (4) and (5) imply that

$$\angle AF_2C = \angle BF_2C,$$

therefore $\alpha = \beta$. The theorem is proved.

Acknowledgements

The work of AP was supported by the *Center for Research and Development in Mathematics and Applications* (CIDMA) from the "Fundação para a Ciência e a Tecnologia" (FCT), cofinanced by the European Community Fund FEDER/POCTI, and by the FCT research project PTDC/MAT/113470/2009.

References

- [1] A. Aleksenko and A. Plakhov. *Bodies of zero resistance and bodies invisible in one direction*. *Nonlinearity* **22**, 1247-1258 (2009).
- [2] M. Belloni and B. Kawohl. *A paper of Legendre revisited*. *Forum Math.* **9**, 655-668 (1997).
- [3] F. Brock, V. Ferone and B. Kawohl. *A symmetry problem in the calculus of variations*. *Calc. Var.* **4**, 593-599 (1996).

-
- [4] D. Bucur and G. Buttazzo. *Variational Methods in Shape Optimization Problems*. Birkhäuser (2005).
 - [5] G. Buttazzo, V. Ferone, and B. Kawohl. *Minimum problems over sets of concave functions and related questions*. *Math. Nachr.* **173**, 71-89 (1995).
 - [6] G. Buttazzo and B. Kawohl. *On Newton's problem of minimal resistance*. *Math. Intell.* **15**, 7-12 (1993).
 - [7] M. Comte, T. Lachand-Robert. *Newton's problem of the body of minimal resistance under a single-impact assumption*. *Calc. Var. Partial Differ. Equ.* **12**, 173-211 (2001).
 - [8] M. Comte, T. Lachand-Robert. *Existence of minimizers for Newton's problem of the body of minimal resistance under a single-impact assumption*. *J. Anal. Math.* **83**, 313-335 (2001).
 - [9] M. Comte and T. Lachand-Robert. *Functions and domains having minimal resistance under a single-impact assumption*. *SIAM J. Math. Anal.* **34** (2002), 101-120.
 - [10] G. Galperin. *Relationship between Euclidean, Lobachevskian (hyperbolic), and Billiard metrics and its application to a billiard problem in \mathbf{R}^d* . *Regular and Chaotic Dynamics* **8**, 441-448 (2003).
 - [11] T. Lachand-Robert and E. Oudet. *Minimizing within convex bodies using a convex hull method*. *SIAM J. Optim.* **16**, 368-379 (2006).
 - [12] T. Lachand-Robert, M. A. Peletier. *Newton's problem of the body of minimal resistance in the class of convex developable functions*. *Math. Nachr.* **226**, 153-176 (2001).
 - [13] I. Newton. *Philosophiae naturalis principia mathematica*. 1687.
 - [14] A. Plakhov. *Scattering in billiards and problems of Newtonian aerodynamics*. *Russian Mathematical Surveys* **64**, 873-938 (2009).
 - [15] A. Plakhov. *Optimal roughening of convex bodies*. *Canad. J. Math.* **64**, 1058-1074 (2012).

FAST TRAVELING-WAVE REACTOR OF THE CHANNEL TYPE

Vitaliy D. Rusov^{1*}, *Victor A. Tarasov*¹, *Volodymyr N. Vashchenko*²,
*Sergei A. Chernenchenko*¹, *Andrei A. Kakaev*¹, *Oksana I. Pantak*¹

Abstract. The main aim of this paper is to solve the technological problems of the TWR based on the technical concept described in our priority of invention reference [1], which makes it impossible, in particular, for the fuel claddings damaging doses of fast neutrons to exceed the 200 dpa limit. Thus the essence of the technical concept is to provide a given neutron flux at the fuel claddings by setting the appropriate speed of the fuel motion relative to the nuclear burning wave.

The basic design of the fast uranium-plutonium nuclear traveling-wave reactor with a softened neutron spectrum is developed, which solves the problem of the radiation resistance of the fuel claddings material.

1 Introduction

Today the idea of a wave-like neutron-nuclear burning is almost undisputed. Meanwhile in the field of physical theory, in our opinion, there are some problems still unexplored and extremely important. Among them are the influence of the heat transfer during the temperature and pressure change over a wide range, the phase state of the fissile medium and its influence on the existence and stability of a nuclear burning wave. Such problems as the heterogeneous structure of the core, the influence of the radiation-induced defects kinetics in the fuel, the heat convection and mixing (liquid or gas fuel), the radiation resistance of the fuel claddings construction materials, the ignition modes (initialization) and others also remain unexplored. It is also interesting to study the kinetics of the neutron-nuclear burning in combined fissile media (uranium-plutonium, uranium-thorium medium with various pre-enrichments in ²⁵⁸U, ²³³U, ²³⁹Pu and possibly some other fissile nuclides such as ²⁴¹Pu or Cm) and, consequently, the combined uranium-plutonium and thorium-uranium burning waves, and perhaps even some others, as well as the kinetics of the nuclear burning wave reflection from the boundaries of the medium (neutron reflector), the repeated waves and the burning waves interference.

At the same time, some of the technological problems of TWR are very actively discussed in the scientific community today. This often leads to a conclusion about the impossibility of such project [2] because of a number of its insurmountable disadvantages:

¹ Department of Theoretical and Experimental Nuclear Physics, Odessa National Polytechnic University, Odessa, Ukraine.

² State Ecological Academy for Postgraduate Education, Kiev, Ukraine

* Corresponding author. siiis@te.net.ua

- a high degree of nuclear fuel burn-out (at least 20% on average), which assumes:
 - a high damaging dose from fast neutrons acting on the material of the fuel claddings (500 dpa);
 - large gas emission, which requires increasing of the inner gas cavity length in the long fuel rods;
- a long active zone, which requires the use of the long fuel rods, the parameters of which are unacceptable from the exploitation point of view. In particular, this applies to the parameters characterized by significant growth of:
 - the value of the positive void coefficient of reactivity;
 - the hydraulic resistance;
 - the energy consumption for pumping of the coolant through the reactor;
- The problem of spent nuclear fuel, associated with the need of the unburned plutonium processing and disposal of the radioactive waste.

However nowadays there are several proposals of the possible principal TWR designs [3–14] based on scientific results [15–72], proving the possibility of the theoretical and technical implementation of the slow neutron-nuclear burning modes.

A wave reactor on fast neutrons in self-regulating neutron-nuclear mode of the second kind is known. First it was presented in papers [5, 6] and its advanced implementation was patented in [14].

Let us consider its drawbacks.

This reactor does not implement a slow traveling soliton-like wave of neutron-nuclear burning mode. All the volume of the reactor active zone during its operation is in self-regulating neutron-nuclear mode of the second kind. Such reactor is not completely self-regulating, but requires some criticality regulation by the control systems. The reactor active zone consists of two or several zones, one of them being a neutron source, providing the necessary neutron production at its start and therefore contains enriched reactor fuel requiring supercritical load and absorbing control rods and a protection system. The possible ^{238}U burn-out in non-enriched zones ("breeding" fuel zone) does not exceed 10%.

A wave reactor on fast neutrons is also known [8–13]. It was proposed by "Terra-power" to operate in the so-called standing wave mode.

Its drawbacks:

The slow traveling soliton-like neutron-nuclear burning is not implemented in this reactor. The entire volume of the reactor active zone represents a neutron-nuclear burning zone during its operation. The reactor active zone consists of two zones, the central zone being a neutron source and provides the necessary neutron generation during reactor start-up and operation, and therefore contains enriched reactor fuel, creating supercritical load and contains absorbing control and protection system rods for reactor control. During the reactor start-up and some time after the start-up the reactor criticality regulation by external control systems is required. Such adjustment is analogous

to operation modes of the usual fast reactors with small excessive reactivity and requires the similar control and protection systems. Therefore, in reactors proposed by "Terra-power" like in reactors proposed in [14], a significant advantage of traveling burning wave reactor is absent — a complete self-regulation of the reactor active zone and consequently, the possibility of significant simplification and cheapening of the control and protection systems. A solution of the excessive shell materials damaging dose problem is also absent in reactors proposed by "Terra-power".

It should be noted however, that the "Burns and Roe" company, specializing in the design and construction of the nuclear power stations, already offers the architectural and engineering projects for the conceptual design of TWR developed by "Terra-power" on their website.

In the papers by H. Sekimoto [29–65] a design of fast nuclear reactors capable of the traveling wave nuclear burning is studied. However, the main problem hindering the implementation of a traveling wave reactor – the problem of the radiation damaging dose for the fuel claddings – is also not solved in those studies.

H. Sekimoto suggests an interesting idea [39–41, 46, 47] that the wave burning can be implemented in a thermal high-temperature gas reactor, for example, in the Japanese Experimental working reactor HTTR, if its fuel (enriched in ^{235}U) previously added burnable neutron absorber ^{157}Gd , it is interesting. And as presented in [49], the results of mathematical modeling, wave fuel burning associated with its local transition in the field of burning in supercritical state, will be provided by local burnup absorber ^{157}Gd in the burning zone (and in the initiation of the burning wave burnup absorber ^{157}Gd in the nearest zone of nuclear fuel to an external source of neutrons).

2 Fast TWR of the channel type with a fixed construction part

In this section we present and justify a possible design of the fast TWR of channel type. As noted above, perhaps the most important is to solve the problem of high integral damaging dose of fast neutrons on construction materials in wave nuclear reactors, which may reach 500dpa for the nuclear burning wave with the maximum burn-out of ^{235}U . However, the materials capable of withstanding such a radiation load have not been created so far, and the maximum achievable radiation exposure for the reactor metals is $100 \div 200$ dpa. Indeed, as shown in [2] and in Table 1 in [2], none of the simulated burning wave modes provide the necessary radiation resistance of construction materials in fuel claddings. Let us also note that recently published papers [73, 74] confirmed these estimations of the radiation load on the fuel shells during the wave burning on the fast neutrons.

The problem of the principal TWR design creation including the solution of the high integral damaging dose of fast neutrons in construction materials (first of all, the fuel rods shells) was set as a base for the invention. The specified problem is solved in this framework by a technical implementation of moving nuclear fuel (in which the nuclear burning wave travels) relative to the

	$\Delta_{1/2}$ [cm]	u [cm/day]	φ [cm ⁻² s ⁻¹]	ψ [cm ⁻²]	$\langle \sigma_{dpa} \rangle$ [barn]	$\frac{n_{dpa}}{200}$	Fuel burn-up	Solution
U-Pu cycle								
Sekimoto [75]	90	0.008	$3.25 \cdot 10^{15}$	$3.2 \cdot 10^{23}$	1000	3.2	~43%	No
Rusov [76]	200	2.77	10^{18}	$6.2 \cdot 10^{24}$	1000	62	~60%	No
Pavlovich [77]	–	0.003	–	$1.7 \cdot 10^{24}$	1000	17	~30%	No
Fomin [67]	100	0.07	$2 \cdot 10^{16}$	$2.5 \cdot 10^{24}$	1000	25	~30%	No
Fomin [68]	125	1.7	$5 \cdot 10^{17}$	$3.2 \cdot 10^{24}$	1000	32	~40%	No
Chen [69]	216	0.046	$3 \cdot 10^{15}$	$1.2 \cdot 10^{24}$	1000	12	~30%	No
Terra Power [70]	–	–	–	–	–	1.75	~20%	No
Th-U cycle								
Teller [4]	70	0.14	$\sim 2 \cdot 10^{15}$	$8.6 \cdot 10^{22}$	1000	0.96	~50%	Yes
Seifritz [71]	100	0.096	10^{15}	$9.0 \cdot 10^{22}$	1000	0.90	~30%	Yes
Melnik [72]	100	0.0055	$0.5 \cdot 10^{16}$	$7.9 \cdot 10^{24}$	1000	~80	~50%	No
U-Pu (+ moderator)								
Example	100	0.234	$2.5 \cdot 10^{15}$	$9.2 \cdot 10^{23}$	100	0.92	~20%	Yes
Ideal TWR	–	–	–	10^{24}	100	1.0	$\geq 20\%$	Yes

Tab. 1: Results of the numerical experiments of the wave mode parameters based on U-Pu and Th-U cycles

fuel rod shell. The movement speed is adjusted to provide the required integral fluence reduction at the fuel rod shell.

Let us consider the following ratio of the integral fluences for metals of the modern operating reactors and the TWR under development:

$$\frac{Fluence_{TWR}^{metal}}{Fluence_{oper}^{metal}} \sim \frac{\Phi_{TWR} \cdot t_{TWR}^{metal.camp.}}{\Phi_{oper} \cdot t_{oper}^{metal.camp.}} \sim \frac{500 \text{ dpa}}{100 \text{ dpa}} \quad (1)$$

where Φ_{TWR} and Φ_{oper} are the neutron flux densities for the TWR and the modern operating reactors respectively. And 500 *dpa* and 100 *dpa* are the commonly considered values of the radiative resistance of the construction materials for possible nuclear burning modes with maximal ^{238}U burn-out in TWRs and operating reactors respectively.

Let:

$$\begin{aligned} \Phi_{oper} &\sim 10^{14} \text{ neutrons/cm}^2 \cdot \text{s} \quad \text{and} \quad t_{oper}^{camp} \sim 3 \text{ years} \\ \Phi_{TWR} &\sim 10^{17} \text{ neutrons/cm}^2 \cdot \text{s} \end{aligned} \quad (2)$$

Then from (1) in case (2) we obtain the estimate of the metals campaign time in TWR:

$$t_{TWR}^{camp} \sim \frac{500 \cdot 10^{14} \cdot 3}{100 \cdot 10^{17}} \text{ years} \sim 1.5 \cdot 10^{-2} \text{ years} \sim 4.5 \cdot 10^5 \text{ s} \quad (3)$$

The time of the fuel nuclear burning in the active zone is

$$t_{fuelburn} = \frac{l_{fuel}}{v_{nucl.burn.}} \quad (4)$$

where l_{fuel} is the length of the active zone containing the fuel, $v_{nucl.burn.}$ is the nuclear burning wave traveling speed.

In order to reduce the radiation damage of the construction materials (fuel rod shell) significantly, the fuel movement speed relative to fixed fuel rod shell (along the channel-like active zone where the fuel rods shells are the most close to nuclear fuel channel shells (Fig. 1)) must satisfy the following relation:

$$v_{az} \geq \frac{l_{az}}{t_{fuel \text{ burn}}} = \frac{l_{az} v_{nucl.burn.}}{l_{fuel}} \quad (5)$$

where l_{az} is the active zone length (fixed constructive part of the active zone in Fig. 1).

The TWR construction materials campaign time may be written in the following form:

$$t_{TWR}^{campmetal} \approx \frac{l_{burning \ wave}}{v_{az} + v_{nucl.burn.}} \sim \frac{\lambda_{diff. \ neutrons}}{v_{az} + v_{nucl.burn.}} \quad (6)$$

where $l_{burningwave}$ is the burning wave width (local burning zone), $\lambda_{diff. \ neutrons}$ is the neutron diffusion length.

The expression (6) may be transformed using (5) into:

$$t_{TWR}^{camp.metal.} \sim \frac{l_{burning \ wave}}{v_{az} + v_{nucl.burn.}} \leq \frac{l_{burning \ wave}}{(l_{az}/l_{fuel} + 1)v_{nucl.burn.}} \quad (7)$$

From (7) considering the estimate of the TWR metals campaign (3) we obtain:

$$\begin{aligned} \frac{l_{fuel}}{l_{az}} &\geq \frac{v_{nucl.burn}}{l_{burning\ wave}} (t_{TWR}^{camp.metal.} + 1) \sim \\ &\sim \frac{2.31 \cdot 10^{-5} \text{ cm/s}}{100 \text{ cm}} \cdot 4.5 \cdot 10^5 \text{ s} \sim 10^{-1} \end{aligned} \quad (8)$$

where $v_{nucl.burn} = 2.31 \cdot 10^{-5} \text{ cm/s}$, $l_{burning\ wave} \sim 100 \text{ cm}$.

Therefore, according to (5) and (7), the following nuclear fuel movement speed may be estimated as:

$$v_{az} \geq \frac{l_{az}}{l_{fuel}} v_{nucl.burn.} = 10 \cdot v_{nucl.burn.} \quad (9)$$

Consequently, according to (7), for $l_{fuel} \sim 5 \text{ m}$ we obtain $l_{az} \sim 50 \text{ m}$, and according to (5), for $v_{nucl.burn.} = 2.31 \cdot 10^{-5} \text{ cm/s}$ we obtain $v_{az} \sim 10 \cdot 2.31 \cdot 10^{-5} \text{ cm/s} \sim 2.31 \cdot 10^{-4} \text{ cm/s}$, and the TWR campaign time

$$\begin{aligned} t_{TWR}^{camp.metal.} &\sim \frac{l_{az}}{v_{az}} \sim \\ &\sim \frac{5 \cdot 10^3 \text{ cm}}{2.31 \cdot 10^{-4} \text{ cm/s} \cdot 3 \cdot 10^7 \text{ s/year}} \sim 0.72 \text{ years} \end{aligned} \quad (10)$$

From this example calculation it is clear that the main physical parameters determining the spatial and temporal parameters of the possible TWR construction are Φ_{TWR} , $v_{nucl.burn.}$ and $l_{burningwave}$.

It should be noted that these parameters may be calculated by mathematical modeling of the wave nuclear burning kinetics.

Obviously, since the fuel movement speed along the active zone must satisfy expression (5), it may be provided by a technical implementation during the reactor construction. It may even be increased in case the greater reduction of radiation impact at the fuel rod shell is required.

For the obtained estimates the following neutron flux density was also obtained:

$$\Phi_{TWR} \sim 10^{17} \text{ neutrons/cm}^2 \cdot \text{s} \quad (11)$$

This value was chosen by modeling results:

- According to our results for fast U-Pu cylindrical reactor (diameter 70 cm, length 400 cm) $\Phi \sim 10^{19} \text{ neutrons/cm}^2 \cdot \text{s}$ [22-24];
- According to Fomin's group data for Th-U reactor $\Phi \sim 10^{16} \text{ neutrons/cm}^2 \cdot \text{s}$ [25-27].

Considering that flux density will significantly reduce under "softening" of the spectrum, and wave reactor-transmutator for nuclides accumulated due to reactor fuel burning that create the highest hazard for biosystem, ideally should operate on neutrons with energy around 1 keV (intermediate neutrons), the abovementioned estimate for the neutron flux was chosen.

The burning wave width (local burning zone) $l_{burning\ wave}$ was chosen 100 cm for the estimate [22-27].

Let us note that neutron diffusion length will decrease in case of the spectrum softening due to increase of the nuclear reactions cross-sections. And so does the burning zone length $l_{burning\ wave}$. Thus according to (7) and (8), the nuclear fuel movement speed $v_{nucl.burn.}$ and the active zone length l_{az} may be reduced.

Let us also note that the estimates were made for the hardest conditions of the materials operation: high burnout and minimal burning speed (non-enriched technical and natural uranium).

Hence in case the neutron-nuclear burning kinetics is implemented in such a way that the flux density is high and the burning wave speed is small, i.e. integral fluence at materials exceeds the currently acceptable level, then this problem may be solved by increasing the fuel local burning zone movement speed relative to edges/channels of the fuel rods shells.

To achieve this, according to the above said, we must ensure that the fuel movement speed along the fuel channel v_{az} is greater than the fuel burning wave speed $v_{nucl.burn.}$, according to the estimate obtained above by technical implementation. As shown above, these estimates for the chosen parameters are: $v_{az} \sim 2.31 \cdot 10^{-4} \text{ cm/s}$ and $v_{nucl.burn.} \sim 2.31 \cdot 10^{-5} \text{ cm/s}$. I.e. if one is able to technically implement the fuel movement speed along the channel just ten times greater than the neutron-nuclear fuel burning wave speed, then one would solve the problem of radiation stability of the fuel rod shells.

For comparison let us give the estimates for the case when an absorbing moderator layer is located between the fissile fuel and the fuel channel shell metal. It reduces neutron flux density at fuel channel shell e.g. two times relative to the flux density in previous calculations, i.e. $\Phi_{TWR} \sim 5 \cdot 10^{16} \text{ neutrons/cm}^2 \cdot \text{s}$.

Then, according to (3), for the TWR metal campaign time we obtain:

$$\begin{aligned} t_{TWR}^{camp.metal.} &\sim \frac{500 \cdot 10^{14} \cdot 3}{100 \cdot 5 \cdot 10^{16}} \text{ years} \sim \\ &\sim 3.0 \cdot 10^{-2} \text{ years} \sim 9.0 \cdot 10^5 \text{ s} \end{aligned} \quad (12)$$

And correspondingly according to (8) and (9):

$$\frac{l_{fuel}}{l_{az}} \geq \frac{2.31 \cdot 10^{-5} \text{ cm/s}}{100 \text{ cm}} \cdot 9.0 \cdot 10^5 \text{ s} \sim 0.22 \quad (13)$$

and

$$v_{az} \geq \frac{l_{az}}{l_{fuel}} v_{nucl.burn.} \approx 5 \cdot v_{nucl.burn.} \quad (14)$$

Therefore, for the considered variant according to (13) in case $l_{fuel} = 5 \text{ m}$ we obtain $l_{az} = 25 \text{ m}$ and according to (14) in case $v_{nucl.burn.} \sim 2.31 \cdot 10^{-5} \text{ cm/s}$ we obtain $v_{az} = 5 \cdot 2.31 \cdot 10^{-5} \text{ cm/s} \sim 1.16 \cdot 10^{-4} \text{ cm/s}$, and the wave reactor campaign time

$$\begin{aligned} t_{TWR}^{camp.metal.} &\sim \frac{l_{az}}{v_{az}} \sim \\ &\sim \frac{2.5 \cdot 10^3 \text{ cm}}{1.16 \cdot 10^{-4} \text{ cm/s} \cdot 3 \cdot 10^7 \text{ s/year}} \sim 0.72 \text{ years} \end{aligned} \quad (15)$$

Therefore we reduce the active zone length two times from 50 m in the first variant to 25 m for the second one. This is important because it significantly reduces the possible reactor size and increases the practical implementability of such reactor.

The Fig. 1 presents a concept scheme of the channel-type reactor with one burning fuel rod. Here the reactor hull shape is cylindrical. This is a case of homogeneous active zone of large diameter ($\sim 1\text{-}3$ m). In the given scheme the fuel movement with the given speed is performed by the movement of the bearing frame implemented as a moving part of a hydraulic system. Such construction fits well the reactor prototype enabling experimental testing of burning wave kinetics and all the principal physical and construction parameters. Let us note that there are three coolants in the proposed construction – two in-fuel-rod coolants (coolant 1 and 2 in the scheme), while different coolants may be used; and one inter-hull coolant (coolant 3).

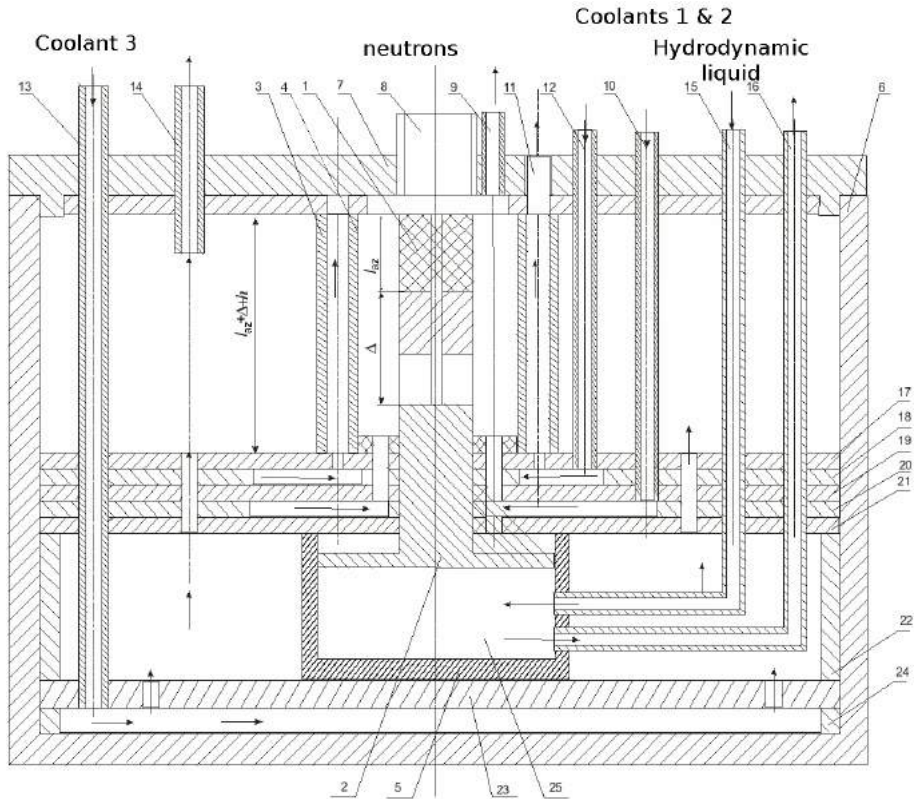


Fig. 1: Concept scheme of TWR prototype with one burning fuel rod. A variant of homogeneous active zone of large diameter ($\sim 1\text{-}3$ m). (1—the nuclear fuel; 2—moving construction of the fuel movement hydraulic system; 3—fuel channel shell; 4—fuel rod shell-fuel channel shell; 5—hydraulic liquid reservoir hull; 6—reactor hull; 7—reactor hull cover; 8—neutron guide; 9—exit pipeline of in-fuel-rod coolant 1; 10—entrance pipeline of in-fuel-rod coolant 1; 11—exit pipeline of in-fuel-rod coolant 2; 12—entrance pipeline of in-fuel-rod coolant 2; 13—entrance pipeline of inter-hull coolant 3, 14—exit pipeline of inter-hull coolant 3, 15—entrance pipeline of hydraulic liquid; 16—exit pipeline of hydraulic liquid; 17—24 — cylindrical reactor bearing construction elements)

The Fig. 1 does not present the aspect ratio for the bearing frame of the hydraulic system for the fuel movement precisely. Indeed, this figure rather corresponds to the case of a hydraulic system bearing frame implementation based on coaxial cylinders principle (radio antenna principle), which is widely used in hydraulic cranes and enabling the reduction of reactor construction size.

Of course, other known and appropriate engineer solutions may be used for the fuel movement system construction.

According to the estimates given above, it seems reasonable to choose the following geometrical parameters for the long-campaign operating reactor prototype project: $l_{fuel} \sim 5\text{ m}$, $l_{az} \sim 25 \div 50\text{ m}$, hull diameter $\sim 20 \div 30\text{ m}$, height $\sim 30 \div 60\text{ m}$.

The fuel used may be:

- Metallic ^{238}U with small Molybdenum addition (up to 10%) for stabilization of cubic uranium lattice up to room temperatures (melting temperature 1406 K);
- Metallic ^{238}U with small Chromium addition (up to 8%) for stabilization of the radiation form change of the alloy (melting temperature $\sim 1400\text{ K}$);
- Natural uranium as uranium-based metallic alloys;
- ^{238}U dioxide (melting temperature 2820 K);
- MOX-fuel;
- Cermet fuel;
- Uranium carbides;
- Nitride fuel;
- Spent nuclear fuel of many nuclear reactor types, e.g. dioxide, nitride fuel, dispersive type fuel etc.;
- Nuclear fuel based on ^{232}Th and ^{238}U .

The fuel problem apparently requires additional research.

Gases used in gas reactors, water and metallic coolants used in reactors (e.g. lithium, sodium, stanum, lead, bismuth, mercury, lead-bismuth mixture, and their complexes) may be used as coolants in different coolant pump designs (Fig. 1).

The specific type of coolant or coolant system providing for thermal-and-physical reactor parameters given by the wave reactor construction requirements specification may be determined only by proper thermal-and-physical calculations and investigations that are yet only planned.

The reactor steel HT9, X18H10T and others may be used as fast reactor construction materials.

Let us note that the coolant pipeline system may be used in the prototype to implement neutron reflector, e.g. water or beryllium, and also for accommodation of moderator-absorbent layer near the fuel rod edge to reduce the

fuel rod shell radiation damage (Fig. 2). This may enable reduction of fuel movement speed and, respectively, the length of the active zone l_{az} .

Indeed, the radiation damage of the fuel rod shell construction materials may be reduced by reduction of the neutron flux achieved by placing the specific quantity of a specially chosen substance with proper characteristics of neutron moderator and absorbent between the fissile material and fuel rod shell. As a result of the neutrons moderation during the interaction with nuclei of the moderator the neutron speed reduces leading to neutron flux density reduction. Due to neutron capture by absorbent the neutron concentration reduces, which also leads to neutron flux density reduction. In nuclear reactors physics the moderation efficiency and moderation coefficient are used as the quantitative moderator characteristics.

The moderator substance must possess a high moderating efficiency and low moderation coefficient for the optimal solution of the problem of neutron flux density reduction by passing through moderator substance. The efficiency of the neutron flux density reduction also depends on moderator-absorbent nuclei concentration i.e. on moderator-absorbent substance density which may be changed by its thermodynamical parameters such as volume, pressure and temperature.

Assuming that nuclear fuel, shell construction material and moderator-absorbent in-between have cylindrical shape, the estimate of radial width of moderator-absorbent layer required for the given neutron flux density reduction may be calculated as follows.

Suppose the flux density under moderation reduces due to neutron energy reduction from E_{fuel} (energy of neutrons released from the nuclear fuel) to E_{shell} (energy of neutrons at the shell after the moderator). Let atomic number of moderator-absorbent substance to be A . The logarithmic mean neutron energy loss (attenuation) during its moderation may be calculated as [78, 79]:

$$\xi = 1 + \frac{(A-1)^2}{2A} \ln \frac{A-1}{A+1} \quad (16)$$

The average impact ratio of the neutron being moderated by the moderator nuclei, required for neutron energy reduction from E_{fuel} to E_{shell} equals [78, 79]:

$$n = \frac{1}{\xi} \ln \frac{E_{fuel}}{E_{shell}} \quad (17)$$

Neutron free path in the moderator is [78, 79]:

$$\lambda = \frac{1}{\Sigma_s + \Sigma_a} \quad (18)$$

where Σ_s is the neutron scattering macroscopic cross-section and Σ_a is the neutron absorption macroscopic cross-section.

The estimates of scattering and absorption cross-sections may be obtained by expressions [78, 79]:

$$\Sigma_s \approx \hat{\sigma}_s N_{moderator} \quad \text{and} \quad \Sigma_a \approx \hat{\sigma}_a N_{moderator} \quad (19)$$

where σ_s and σ_a are the neutron scattering and absorption microscopic cross-sections respectively, averaged over the energy interval from E_{fuel} to E_{shell} ,

$N_{\text{moderator}} = \rho N_A / \tilde{A}$ is the moderator nuclei density, where ρ is the moderator density, N_A is the Avogadro number, \tilde{A} is the molar mass of the moderator.

Then moderator-absorbent layer width required for the given neutron flux density reduction may be estimated as follows:

$$R_{\text{moderator}} \approx \lambda n \quad (20)$$

Below in Table 2 we present the characteristics of some known moderators and the corresponding moderator layer width estimates made for neutrons moderating from $E_{\text{fuel}} = 1.0$ MeV to $E_{\text{shell}} = 0.1$ MeV. ENDF-VII data on cross-sections were used for calculations.

The scheme presented at Fig. 1 may be easily generalized for a bigger number of fuel rods. For example, Fig. 3 presents a possible scheme of seven fuel rods placement on bearing frame driven by hydraulic system of the fuel movement. The fixed fuel rods shells and coolant construction is also easily generalized for bigger number of fuel rods by simply replicating its construction presented in Fig. 1 or Fig. 2. In such a way one obtains a heterogeneous active zone.

Several possibilities for the reactor implementation arise at this point.

First, an implementation simply generalizing homogeneous large-diameter active zone implementation is possible. I.e. a set of several such active zones burning independently from each other, or even sequentially one after another given the corresponding design. In case of simultaneous implementation of independent homogeneous active zones we obviously obtain high-power reactor with relatively short campaign time in comparison to implementation with sequential burning of such active zones. Such a reactor would be promising for burning of spent nuclear fuel in large amounts.

In case of sequential burning design one obtains a source of relatively lower power than in the previous case and with significantly longer campaign time.

Second, the implementation of the reactor in a form of the thin fuel rods set in a collective burning zone is possible. This is analogous to traditional structure of the operating heterogeneous reactors.

Let us note that the fixed reactor active zone part becomes very similar to channel type reactors in this case, in particular to LWGR reactors (see Fig. 3). This also enables one to benefit from the advantages of channel reactors such as increased thermal and physical parameters (temperature and pressure) inside the channels.

Let us also note that the coolant entrance channel system presented in Fig. 1 and Fig. 2 may be replicated and spread by height (length) of the fixed active zone part. This would solve the problem of the increased hydraulic resistance for a long active zone. Indeed, in such approach one can increase the quantity of coolant entrance channels reducing distance between them by height (length) of the active zone to provide for technically implementable coolant hydraulic resistance in the pumping channels.

The examples of the TWR active zone designs given here are clearly only hypothetically possible. Later we need to investigate the kinetics of these reactors by mathematical modeling.

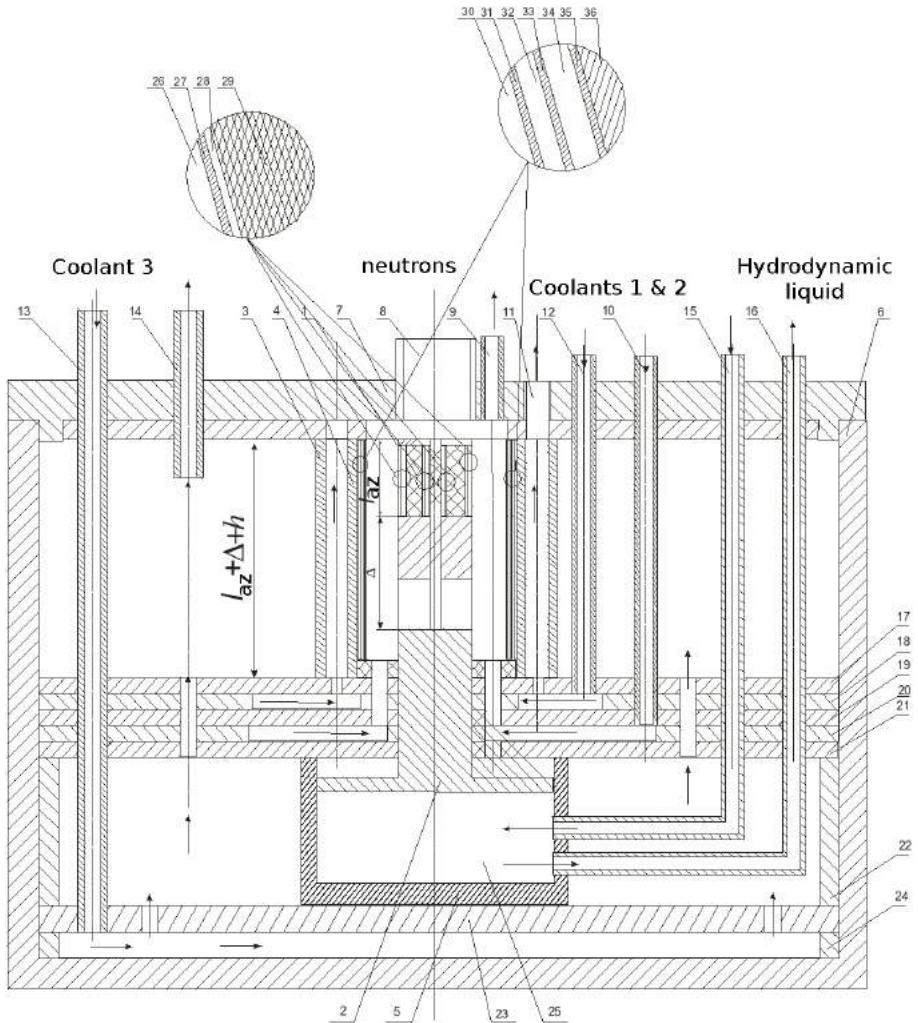


Fig. 2: Concept scheme of a TWR with one burning fuel rod. Homogeneous large-diameter ($\sim 1-3$ m) active zone variant. (1—the nuclear fuel; 2—moving construction of the hydraulic fuel movement system; 3—metal of the fuel channel 2; 4—metal of the fuel channel 1 shell; 5—hydraulic liquid reservoir hull; 6—reactor hull; 7—reactor hull cover; 8—neutron guide; 9—exit pipeline of in-fuel-rod coolant 1; 10—entrance pipeline of in-fuel-rod coolant 1; 11—exit pipeline of inter-channel coolant 2; 12—entrance pipeline of inter-channel coolant 2; 13—entrance pipeline of inter-hull coolant 3; 14—exit pipeline of inter-hull coolant 3; 15—entrance pipeline of hydraulic liquid; 16—exit pipeline of hydraulic liquid; 17—24—cylindrical bearing, constructive elements of the reactor; 25—hydraulic liquid; 26—coolant 1; 27—protection shell metal; 28—beryllium moderator; 29—fuel; 30—coolant 1; 31—protection shell metal; 32—beryllium moderator; 33—protection shell metal; 34—carbon; 35—protection shell metal; 36—fuel channel 1 shell metal)

Moderator	Mass number, A	Mean logarithmic energy, ξ	density, ρ , g/cm ³	Impacts required for moderating, n	Neutron mean free path, λ	Moderating ability, $\xi\Sigma_s$, cm ⁻¹	Moderating coefficient, $\xi\Sigma_s/\Sigma_a$	Moderator layer width, R_{mod} , cm
Be	9	0.21	1.85	11	1.39	0.151	15100	15.3
BeO	25		2.96					
C	12	0.158	1.60	15	3.56	0.044		53.4
H ₂ O	18	0.924	1.0	2.5	16.7	0.055		41.6
H ₂ O + 10%B				2.5	10.0			25.0
D ₂ O	20		1.1					
H	1	1.0	$0.09 \cdot 10^{-4}$	2.3	$0.37 \cdot 10^4$	$2.65 \cdot 10^{-4}$	$0.62 \cdot 10^5$	$0.85 \cdot 10^4$
He	4	0.425	0.00018	5.41	10^4			$5.41 \cdot 10^4$
He	4	0.425	0.18	5.41	11.2			60.7
CO ₂			$1.98 \cdot 10^{-3}$					
Pb	207	0.01	11.3	230	4.27	0.0023	$0.75 \cdot 10^3$	982.1
Hg	200	0.01	13.6	230	3.01	0.0033	15.71	692.8
Bi	209	0.01	9.8	230	5.08	0.0020	16.02	1167.5
Sn	118	0.02	7.4	115	4.2	0.0048	3.2	483.2

Tab. 2: Moderating and absorbing properties of some substances, moderator layer width estimate for moderating neutron from $E_{fuel} = 1.0$ MeV to $E_{mod} = 0.1$ MeV.

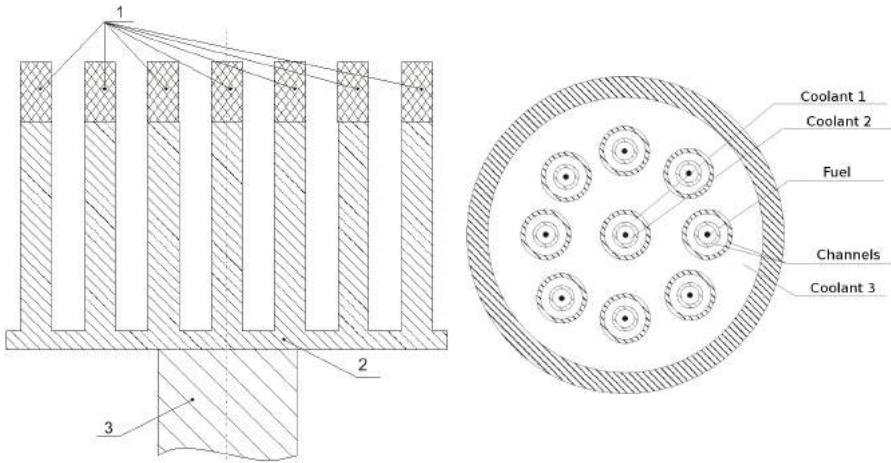


Fig. 3: Left panel: A scheme explaining principles of possible fuel rods placement over moving part of the fuel rods hydraulic movement system (1—fuel; 2 and 3—hydraulic fuel movement system bearing frame).

Right panel: Reactor active zone section scheme (heterogeneous active zone case).

Based on the obtained model results we prepare the requirements specifications, the assignment for developing of the prototypes and development prototypes, design them, create the development prototypes and test them. Only after all that the operating reactors may be developed.

According to the above given estimates it seems that acceptable geometrical parameters of the operating reactor with long campaign may be chosen as: $l_{fuel} \sim 5 m$, $l_{az} \sim 25 \div 50 m$, hull diameter $\sim 30 m$, height $\sim 30 \div 60 m$.

It seems very promising to use a set of ^{238}U spheres filled into a fixed cylinder of the fuel rod shell instead of the metallic ^{238}U rod (Fig. 1, Fig. 3) fixed on moving bearing frame implemented as moving part of the hydraulic system. Of course, the micro fuel rods or spherical fuel elements analogous to spherical fuel elements of high-temperature gas reactors (e.g. analogous to THTR-300 [80, 81] and VTGR-500 (high temperature gas cooled reactor) [82]) (Fig. 4) may be used as a fuel. In the considered case they slowly move along the fuel rod shell following the movement of the bearing framework platform, implemented in form of a moving part of the hydraulic system.

Naturally, we speak of ^{238}U spheres with sizes appropriate for the required constructive allowances for fuel rod shell diameter and moving bearing framework platform diameter to prevent them falling outside the platform. These may be ^{238}U spheres with protective coating made of Si, typical for micro-fuel rods, and probably with carbon layer for the neutron spectrum softening. Let us note that these spheres may be of different diameter: e.g. a layer of larger diameter spheres may be located below to meet construction demands, and the micro-fuel elements spheres above them to increase the fission environment density. However, all these problems have very little principal significance at the moment and are to be solved during the specific construction development. It is important for the process of fuel spheres moving down not to interfere with wave neutron-nuclear fuel burning process.

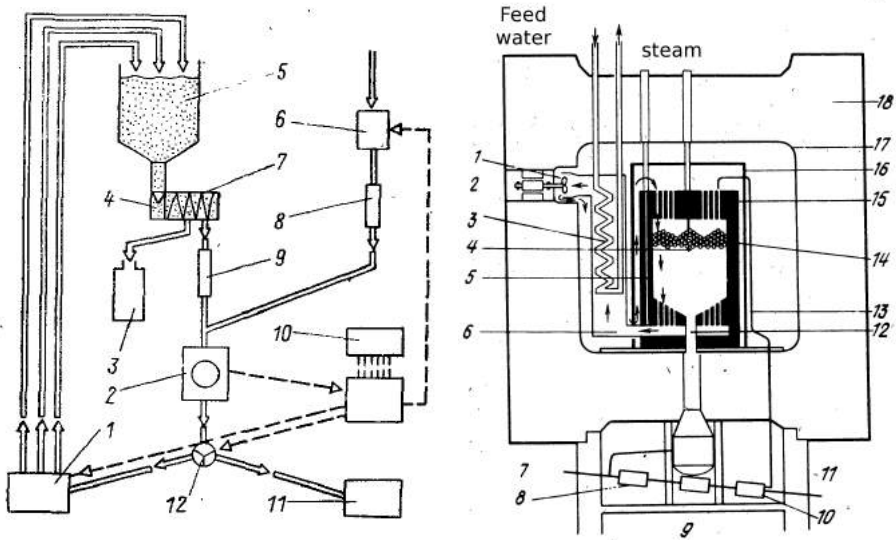


Fig. 4: High-temperature reactor with spherical fuel elements construction scheme [80–82].

Left panel: high temperature gas cooled reactor scheme with fill-in active zone: 1—fuel elements elevator; 2—fuel elements investigation system and burn-out level measurement; 3—damaged elements rods vault; 4—accumulator; 5—active zone; 6—fuel elements feed system; 7—stepwise fuel elements separator; 8,9—intermediate screw conveyors; 10—process control computer; 11—fuel elements withdrawal system; 12—directing device.

Right panel: HRB reactor scheme with spherical fuel elements: 1—gas blower; 2—gas blower gear; 3—steam generator; 4—absorbing reflector rod; 7—spherical fuel elements feed line; 8—accumulating block; 9—fuel burn-out level measuring device; 10—spheres sorting and transport device; 11—spheres unloading device; 12—pipe for spheres unloading; 13—fuel feed channel; 14—spheres fill-in; 15—reflector; 16—heat shield; 17—coating; 18—hull made of preliminarily strained armored concrete.

Let us also note that the concept of burning fuel movement relative to fuel rods shell made of constructive materials considered in this patent also corresponds to a possible active zone construction based on the principles already implemented in known high-temperature gas power reactors (reactors THTR-300 [80, 81] and VTGR-500 (high temperature gas cooled reactor) [82] (Fig. 4)). Their active zone is a hull with cone-like bottom with a hole in the center. The spherical fuel elements are filled in from above and while burning-out, they fall through a hole from the active zone to a spent fuel elements container. Such construction of the TWR may require burn-up of the fuel both in the upper part of the active zone and in the lower part, which requires locating the neutron source for the nuclear burning wave burn-up inside the reactor hull or below it.

The Fig. 5 presents the reactor and reactor equipment location scheme. It gives the size of the reactor prototype. A particle accelerator (e.g. [83]) or impulse nuclear reactor (e.g. [84, 85]) are proposed (see Fig. 5) as an external neutron source. For the sake of the neutron-nuclear burning wave initiation (burn-up) optimization the upper fuel part may be enriched by some fissionable nuclide to such amount that this enriched area would be in under-critical

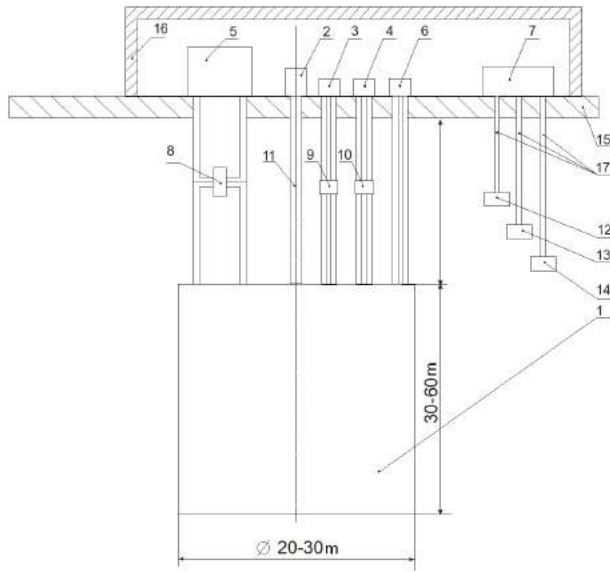


Fig. 5: Wave reactor and reactor equipment arrangement scheme. (1—reactor; 2—accelerator or impulse reactor; 3—coolant 1 pump system and heat takeoff; 4—coolant 2 pump system and heat takeoff; 5— coolant 3 pump system and heat takeoff; 6—hydraulic liquid pump system; 7—neutrino control system; 8—coolant 3 heat exchanger; 9—coolant 1 heat exchanger; 10—coolant 2 heat exchanger; 11—neutron guide; 12,13,14—neutrino detectors; 15—ground surface; 16—reactor hull; 17—neutrino control system communication line).

state. Therefore the proposed channel type TWR construction is a reactor with internal safety [17, 18].

It should be noted that both the TWR project and the spent nuclear fuel processing reactor are apparently single-load reactor projects. After burning the fuel the reactor installation is buried. An implementation of the remote neutrino control of the neutron-nuclear burning wave kinetics [24] (Fig. 5) is obviously required.

Conclusions

The basic design of the fast uranium-plutonium nuclear TWR with a softened neutron spectrum is developed. It solves the problem of the fuel claddings material radiation resistance. This reactor may also work as a processor of the spent nuclear fuel.

References

- [1] V.A. Tarasov, V.D. Rusov, and V.M. Vaschenko. Nuclear power reactor and method for operating the reactor, 2013. 2nd Life Nuclear Solutions GmbH , HOEFER&PARTNER.
- [2] V. D. Rusov, V. A. Tarasov, I. V. Sharph, V. M. Vashchenko, E. P. Linnik, T. N. Zelentsova, M. E. Beglaryan, S. A. Chernegenko, S. I. Kosenko,

- P. A. Molchinikov, V. P. Smolyar, and E. V. Grechan. On some fundamental peculiarities of the traveling wave reactor operation, 2012. URL [arXiv:1207.3695v1 \[nucl-th\]](https://arxiv.org/abs/1207.3695v1).
- [3] E. Teller, M. Ishikawa, and L. Wood. Completely automated nuclear power reactors for long-term operation. In *Proceedings of the Frontiers in Physics Symposium*. American Physical Society and American Association of Physics Teachers Texas Meeting, 1995.
 - [4] E. Teller, M. Ishikawa, L. Wood, R. Hyde, and J. Nuckolls. Completely automated nuclear reactors for long-term operation II: Toward a concept-level point-design of a high-temperature, gas-cooled central power station system, part II. In *Proceedings of the International Conference on Emerging Nuclear Energy Systems, ICENES'96, Obninsk, Russian Federation*, pages 123–127, Obninsk, Russian Federation, 1996. Obninsk, Russian Federation. also available from Lawrence Livermore National Laboratory, California, publication UCRL-JC-122708-RT2.
 - [5] V. Goldin and D. Anistratov. Fast breeder reactor in the self-regulating neutron-nuclear mode. *Mat. Modeling*, 7(10):12–31, 1995.
 - [6] V. Goldin, N. Sosnin, and Y. Troshchiev. Fast breeder reactor in self-regulating regime of the 2nd kind. *Dokl. Akad. Nauk, Mathematical Physics*, 358(6):747–748, 1998.
 - [7] N. Takaki and H. Sekimoto. Potential of CANDU reactor on sustainable development and strengthened proliferation resistance. *Prog. Nucl. Energy*, 50:114–118, 2008a.
 - [8] J. Gilleland, C. Ahlfeld, D. Dadiomov, R. Hyde, Y. Ishikawa, D. McAlees, J. McWhirter, N. Myhrvold, J. Nuckolls, A. Odedra, K. Weaver, C. Whitmer, L. Wood, and G. Zimmerman. Novel reactor designs to burn non-fissile fuels. In *Proceedings of the 2008 International Congress on Advances in Nuclear Power Plants (ICAPP 2008)*, Anaheim, CA, 2008. American Nuclear Society. Paper No. 8319.
 - [9] R. L. Garwin. Fast reactors when? In *Presented at Erice, Sicily International Seminars on Planetary Emergencies and Associated Meetings — 43rd Session*, August 21 2010.
 - [10] Kevan D. Weaver, J. Gilleland, C. Ahlfeld, C. Whitmer, and G. Zimmerman. A once-through fuel cycle for fast reactors. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 132:1–6, April 2010a.
 - [11] R. A. Hyde et al. Automated nuclear power reactor for long-term operation, May 29 2008.
 - [12] R. A. Hyde et al. Method and system for providing fuel in nuclear reactor, July 9 2009.
 - [13] C. E. Ahlfeld et al. System and method for operating a modular nuclear fission deflagration wave reactor, September 10 2009.
 - [14] V. Goldin et al. Active zone of fast U-Pu reactor and operation method, ensures working of the reactor in self-neutron-nuclear mode without reactivity margin, August 20 2010.
 - [15] S. M. Feinberg. Discussion comment. In *Record of Proceedings Session B-10, International Conference on the Peaceful Uses for Atomic Energy*, Geneva, Switzerland, 1958. United Nations.
 - [16] L. P. Feoktistov. Neutron-fission wave. *Dokl. Akad. Nauk*, 309:864–867, 1989.

-
- [17] L. P. Feoktistov. Safety - the key moment of revival of nuclear power. *Successes of physical sciences*, 163(8):89–102, 1993.
- [18] L. P. Feoktistov. From past towards the future: from the hopes about bomb to safe reactor. In *RFNC-ANRISPh*, Snezhinsk, Russia, 1998.
- [19] H. Van Dam. The self-stabilizing criticality wave reactor. In *Proceedings of the Tenth International Conference on Emerging Nuclear Energy Systems 2000*, pages 188–197, NRG, Petten, The Netherlands, 2000.
- [20] A. I. Akhiezer, D. P. Belozorov, F. S. Rofe-Beketov, L. N. Davydov, and Spolnik Z. A. On the theory of propagation of chain nuclear reaction in diffusion approximation. *Yad. Fiz.*, 62:1567–1575, 1999.
- [21] A.I. Akhiezer, D. P. Belozorov, F. S. Rofe-Beketov, L. N. Davydov, and Z. A. Spolnik. The velocity of slow nuclear burning in two-group approximation. *Problems of Atomic Science and Technology*, (6):276–278, 2001.
- [22] V. D. Rusov, V. N. Pavlovich, V. M. Vashchenko, V. A. Tarasov, T. N. Zelentsova, D. A. Litvinov, S. I. Kosenko, V. N. Bolshakov, and E.N. Khotyaintseva. Geoantineutrino spectrum and slow nuclear burning on the boundary of the liquid and solid phases of the Earth’s core, 2004. URL <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0402039v1>.
- [23] V. Rusov, V. Pavlovich, V. Vaschenko, V. Tarasov, T. Zelentsova, V. Bolshakov, D. Litvinov, S. Kosenko, and O. Byegunova. Geoantineutrino spectrum and slow nuclear burning on the boundary of the liquid and solid phases of the Earth’s core. *J. Geophys. Res.*, 112:B09203, 2007.
- [24] V. Rusov, V. Tarasov, and Litvinov D. *Reactor Antineutrinos Physics*. URSS: Moscow, 2008.
- [25] S.P. Fomin, Yu. P. Melnik, V.V. Pilipenko, and N.F. Shulga. Study of self-organizing regime of nuclear burningwave in fast reactor. *Problems of atomic science and technology*, 45(6):106–113, 2005a.
- [26] S.P. Fomin, Yu. P. Melnik, V.V. Pilipenko, and N.F. Shulga. Self-sustained regime of nuclear burning wave in U-Pu fast reactor with Pb-Bi coolant. *Probl. At. Sci. Technol.*, (3):156–163, 2007a.
- [27] S.P. Fomin, Yu. P. Melnik, V.V. Pilipenko, and N.F. Shulga. Self-organized regime of nuclear burning wave in safe fast reactor. In *Proceedings of the 2007 International Congress on Advances in Nuclear Power Plants (ICAPP 2007)*, Nice, France, 2007b. Société Français D’Énergie Nucléair.
- [28] V.D. Rusov, E.P. Linnik, V.A. Tarasov, T.N. Zelentsova, V. N. Vaschenko, S. I. Kosenko, M. E. Beglaryan, S.A. Chernenchenko, P.O. Molchinikolov, S. Saulenko, and O.A. Byegunova. Traveling wave reactor and condition of existence of nuclear burning soliton-like wave in neutron-multiplicating media. *Energies*, 4:1337–1361, 2011a. doi: 10.3390/en4091337.
- [29] H. Sekimoto, K. Ryu, and Y. Yoshimura. CANDLE: The new burnup strategy. *Nuclear science and engineering*, 139:306–317, 2001a.
- [30] H. Sekimoto and K. Ryu. A new reactor burnup concept ”CANDLE”. In *PHYSOR 2000*, Pittsburgh, May 7-11 2000a.
- [31] H. Sekimoto and K. Ryu. Feasibility study on the CANDLE new burnup strategy. *Trans. American Nuclear Society*, 82:207–208, 2000b.
- [32] H. Sekimoto and K. Ryu. A long life lead-bismuth cooled reactor with CANDLE burnup. In *ICENES 2000*, pages 198–206, Petten, The Netherlands, September 24-28 2000c.

- [33] H. Sekimoto and K. Ryu. Demonstrating the feasibility of the CANDLE burnup scheme for fast reactors. *Trans. American Nuclear Society*, 83(45), 2000d.
- [34] H. Sekimoto, K. Ryu, and Y. Yoshimura. CANDLE: The new burnup strategy. *Nucl. Sci. Engin.*, 139:306–317, 2001b.
- [35] H. Sekimoto, V. Toshinsky, and K. Ryu. Natural uranium utilization without enrichment and reprocessing. In *GLOBAL 2001*, Paris, France, September 9-13 2001c.
- [36] H. Sekimoto. Applications of "CANDLE" burnup strategy to several reactors. In *ARWIF-2001*, Chester, UK, October 22-24 2001.
- [37] H. Sekimoto and K. Tanaka. CANDLE burnup for different core designs. In *PHYSOR2002*, Seoul, Korea, October 7-10 2002a.
- [38] H. Sekimoto and K. Tanaka. Application of CANDLE burnup strategy to small reactors. *Trans. American Nuclear Society*, 87, 2002b.
- [39] Y. Ohoka and H. Sekimoto. Application of CANDLE burnup to block-type high temperature gas cooled reactor. In *ICONE11*, Tokyo, Japan, April 20-23 2008.
- [40] H. Sekimoto and Y. Ohoka. Application of CANDLE burnup to block-fuel high temperature gas reactor. In *ICAPP'03*, Cordoba, Spain, May 4-7 2003a.
- [41] H. Sekimoto and Y. Ohoka. Application of CANDLE burnup to block-type high temperature gas cooled reactor for incinerating weapon grade plutonium. In *GENES4/ANP2003*, Kyoto, JAPAN, September 15-19 2003b.
- [42] T. Takada, Y. Udagawa, and H. Sekimoto. Simulation study on CANDLE burnup applied to an LBE-cooled metallic fuel fast reactor. In *GENES4/ANP2003*, Kyoto, JAPAN, September 15-19 2003.
- [43] E. Greenspan, P. Hejzlar, H. Sekimoto, G. Toshinsky, and Wade D.C. New fuel cycle and fuel management options in heavy liquid metal cooled reactors. In *ANFM 2003*, Hilton Head Island, South Carolina, USA, October 5-8 2003a.
- [44] H. Sekimoto. Contribution of CANDLE burnup to future equilibrium nuclear energy utilization. In *GLOBAL 2003*, November 16-20 2003.
- [45] E. Greenspan, P. Hejzlar, H. Sekimoto, G. Toshinsky, and Wade D. New fuel cycle and fuel management options in heavy liquid metal-cooled reactors. *Nucl. Technol.*, 151:177–191, 2003b.
- [46] Y. Ohoka and H. Sekimoto. Application of CANDLE burnup to block-type high temperature gas cooled reactor. *Nucl. Engin. and Design*, 229: 15–23, 2004a.
- [47] Y. Ohoka and H. Sekimoto. Burnup and temperature effects on CANDLE burnup of block-type high temperature gas cooled reactor. In *ICONE12*, Arlington, Virginia, April 25-29 2004b.
- [48] H. Sekimoto. Application of "CANDLE" burnup to small fast reactor. In *5th Int. Conf. on Nuclear Option in Countries with Small and Medium Electricity Grids*, Dubrovnik, Croatia, May 16-20 2004a.
- [49] Y. Ohoka, Ismail, and H. Sekimoto. Effects of burnup and temperature distributions to CANDLE burnup of block-type high temperature gas cooled reactor. In *ICAPP'04*, Pittsburgh, PA, June 13-17 2004.
- [50] Y. Ohoka and H. Sekimoto. Simulation study on CANDLE burnup of high temperature gas reactor. *Trans. American Nuclear Society*, 92, 2004c.

-
- [51] H. Sekimoto. Effect of neutron spectra and fuel burnup on CANDLE calculation. *Trans. American Nuclear Society.*, 92, 2004b.
- [52] Y. Ohoka, T. Watanabe, and H. Sekimoto. Neutron characteristics of CANDLE burnup applied to HTTR. In *COE-INES - Indonesia International Symposium 2005*, Bandung, Indonesia, March 2-4 2005a.
- [53] H. Sekimoto. Application of "CANDLE" burnup to LBE cooled fast reactor. In *IAEA-TECDOC-1451*, pages 203–212, 2005a.
- [54] H. Sekimoto, Y. Udagawa, and Y. Ohoka. Application of "CANDLE" burnup to fast and thermal reactors. In *ICAPP'05*, Seoul, KOREA, May 15-19 2005.
- [55] Y. Ohoka, H. Sekimoto, T. Watanabe, P. H. Liem, Wakana S., and Ismail. Neutronic characteristics of CANDLE burnup applied to block-type high temperature gas cooled reactor. In *ICAPP'05*, Seoul, KOREA, May 15-19 2005b.
- [56] H. Sekimoto and Y. Udagawa. Shut-down and restart simulation of CANDLE fast reactors. *Trans. American Nuclear Society*, 93, 2005.
- [57] S. Sekimoto, H. Miyashita. Startup of "CANDLE" burnup in fast reactor from enriched uranium core. In *ICENES'2005*, Brussels, Belgium, August 21–26 2005b.
- [58] H. Sekimoto. Application of CANDLE burnup strategy for future nuclear energy utilization. *Progress in Nucl. Energy*, 47:91–98, 2005c.
- [59] H. Sekimoto. CANDLE burnup of fast reactor with depleted uranium. In *9-th Int. Conf. "Nuclear Safety & Nuclear Education"*, Obninsk, Russia, 24-27 October 2005d.
- [60] H. Sekimoto and Y. Udagawa. Effects of fuel and coolant temperatures and neutron fluence on CANDLE burnup calculation. *J. of Nucl. Sci. Technol.*, 43:189–197, 2006.
- [61] H. Sekimoto and S. Miyashita. Startup of "CANDLE" burnup in fast reactor from enriched uranium core. *Energy Conv. Manag.*, 47:2772–2780, 2006.
- [62] H. Sekimoto. Candle burnup in a fast reactor core and relating nonlinear problems. In *2nd International Conf. on Quantum Electrodynamics and Statistical Physics (QEDSP2006)*, Kharkov, Ukraine, 19-23 September 2006.
- [63] Sekimoto H. *A Light of CANDELE. New Burnup Strategy*. Tokyo Institute of Technology, 2005.
- [64] N. Takaki and H. Sekimoto. Potential of CANDLE reactor on sustainable development and strengthened proliferation resistance. *Prog. Nucl. Energy*, 50:114–118, 2008b.
- [65] H. Sekimoto and K. Ryu. Introduction of MOTTO cycle to CANDLE fast reactor. In *Proceedings of PHYSOR 2010 - Advances in Reactor Physics to Power the Nuclear Renaissance*, Pittsburgh, Pennsylvania, USA, May 9-14 2010.
- [66] V. Pavlovich, V. Khotyaintsev, and E. Khotyaintseva. Nuclear burning wave reactor: wave parameter control. *Nuclear Physics and Energetic*, 11: 49–56, 2010a.
- [67] S.P. Fomin, Y.P. Mel'nik, V.V. Pilipenko, and N.F. Shulga. Self-sustained regime of nuclear burning wave in u-pu fast neutron reactor with pb-ni coolant. *Problems of Atom. Sci. and Technology*, 3:156–163, 2007c.

- [68] S.P. Fomin, Y.P. Mel'nik, V.V. Pilipenko, and N.F. Shulga. Investigation of self-organization of the non-linear nuclear burning regime in fast neutron reactor. *Ann. Nucl. Energy.*, 32:1435–1456, 2005b.
- [69] X-N. Chen, W. Maschek, A. Rineiski, and E. Kiefhaber. Solitary burn-up wave solution in multi-group diffusion-burnup coupled system. In *ICENES'2007*, Istanbul, Turkey, 2007.
- [70] K.D. Weaver, J. Gilleland, C. Ahlfeld, C. Whitmer, and G. Zimmerman. A once-through fuel cycle for fast reactors. *J. Eng. for Gas Turbines and Power*, 132:1–7, 2010b.
- [71] W. Seifritz. On the burn-up theory of fast soliton reactors. *Int. J. Hydrogen Energy*, 23:77–82, 1998.
- [72] Yu.P. Melnik, V.V. Pilipenko, A.S. Fomin, S.P. Fomin, and N.F. Shulga. Study of a self-regulated nuclear burn wave regime in a fast reactor based on a thorium-uranium cycle. *Atomic Energy*, 107:49–56, 2009.
- [73] Staffan Qvist, Jason Hou, and Ehud Greenspan. Design and performance of 2d and 3d-shuffled breed-and-burn cores. *Annals of Nuclear Energy*, 85: 93 – 114, 2015. ISSN 0306-4549. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.anucene.2015.04.007>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0306454915001978>.
- [74] Jason (Jia) Hou, Staffan Qvist, Roger Kellogg, and Ehud Greenspan. 3d in-core fuel management optimization for breed-and-burn reactors. *Progress in Nuclear Energy*, 88:58 – 74, 2016. ISSN 0149-1970. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.pnucene.2015.12.002>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0149197015301219>.
- [75] Hiroshi SEKIMOTO and Yutaka UDAGAWA. Effects of fuel and coolant temperatures and neutron fluence on candle burnup calculation. *Journal of Nuclear Science and Technology*, 43(2):189–197, 2006. doi: 10.1080/18811248.2006.9711081. URL <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/18811248.2006.9711081>.
- [76] Vitaliy D. Rusov, Elena P. Linnik, Victor A. Tarasov, Tatiana N. Zentsova, Igor V. Sharph, Vladimir N. Vaschenko, Sergey I. Kosenko, Margarita E. Beglaryan, Sergey A. Chernezhenko, Pavel A. Molchinikolov, Sergey I. Saulenko, and Olga A. Byegunova. Traveling wave reactor and condition of existence of nuclear burning soliton-like wave in neutron-multiplying media. *Energies*, 4(9):1337–1361, 2011b. ISSN 1996-1073. doi: 10.3390/en4091337. URL <http://www.mdpi.com/1996-1073/4/9/1337>.
- [77] V.N. Pavlovich, V.N. Khotyaintsev, and E.N. Khotyaintseva. Nuclear burning wave reactor: wave parameter control. *Nuclear Physics and Energetics*, (11):49–56, 2010b.
- [78] G.G. Bartolomey, G.A. Bat', V.D. Baibakov, and M.S. Altukhov. *Basic theory and methods of nuclear power installations calculation*. Energoatomizdat, Moscow, 1989. in Russian.
- [79] S. V. Shirokov. *Nuclear Reactor Physics*. Naukova Dumka, Kiev, 1992. in Russian.
- [80] G. Kessler. *Nuclear fission reactors. Potential role and risks of converters and breeders*. Springer-Verlag Wien, 1983.
- [81] I.Y. Emelyanov, V.I. Mihan, and V.I. Solonin. *The construction of nuclear reactors*. Energoizdat, Moscow, 1992. in Russian.

- [82] B.A. Dement'ev. *Nuclear energetic reactors*. Energoatomizdat, 1990. in Russian.
- [83] D. Ridiskas, H. Safa, and M.L. Giacri. Conceptual study of neutron irradiator-driven by electron accelerator. In *7 Information Exchange Meeting Jeju (Republic of Korea)*, 2002.
- [84] A.V. Arapov, A.A. Deviatkin, I.Y. Drozdov, and M.V. Mochkaev. The results of physical start-up of the reactor BR-1M. problems of high energy density physics. In *XII Khariton Topical Scientific Readings. Reports*. Sarov: Publishing House of the Federal State Unitary Enterprise "RFNC-VNIIEF", 2010. in Russian.
- [85] V.F. Kolesov. *Aperiodic pulsed reactors. Vol.1*. Sarov: Publishing House of FSUE "RFNC-VNIIEF", 2007. in Russian.

ФИЛОСОФСКИЕ АСПЕКТЫ ГРАВИТАЦИОННОЙ АСТРОНОМИИ. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МИРОПОНИМАНИЕ

*Н. В. Кондратьева*¹

1. Теория гравитации

Основоположником теории гравитации можно считать И. Ньютона. Согласно сформулированному им закону всемирного тяготения, все тела во Вселенной притягиваются друг к другу с силой, пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. Ньютон попробовал применить этот закон ко всей Вселенной. И тогда для объяснения статичности Вселенной, того обстоятельства, что все тела не сжались в одно тело и не движутся друг к другу, ему понадобилось ввести гипотезу пространственной бесконечности Вселенной. В бесконечной Вселенной может происходить, как думал Ньютон, некоторое уравнивание сил тяготения с разных сторон, и Вселенная может быть статичной. Однако к концу XIX века ньютоновская теория пространственно бесконечной Вселенной была поставлена под сомнение (парадоксы Зеелигера и Ольберса) [1].

Разрешить эти парадоксы взялся А. Эйнштейн. В 1915 году он сформулировал Общую теорию относительности (ОТО), которая является теорией гравитации как кривизны четырехмерного пространства-времени. Основным уравнением теории гравитации является уравнение Эйнштейна, из которого в частном случае следует закон всемирного тяготения Ньютона. Уравнение Эйнштейна устроено так, что в его правой части стоит выражение, описывающее «материю» (вещество или излучение), а в левой части — «геометрию» (кривизну пространства-времени). Популярное объяснение, как большая масса «искривляет» пространство, предложил Я. Перельманн [2] : возьмем лист бумаги и горизонтально подвесим его. Затем положим на середину листа небольшой груз: лист прогнется под тяжестью груза и его поверхность станет «кривой». Чем больше груз, тем более искривленной станет поверхность листа. Рассматривая движение небольшого шарика по поверхности такого листа, мы обнаружим, что если при отсутствии груза он двигался по прямой, то при движении по искривленной поверхности он будет стремиться скатываться к местоположению груза, что можно интерпретировать как притяжение большим грузом малого. (Здесь, конечно, может возникнуть вопрос: все будет так выглядеть,

¹nkondr24@gmail.com

если мы будем наблюдать за листом и грузом со стороны, а если мы будем находиться «внутри» листа? На этот вопрос есть ответ, однако он уже требует определенной математики).

Левая часть уравнения Эйнштейна описывает геометрию и кривизну этой геометрии, отождествляемую с гравитационным полем. Материя, представленная правой частью уравнения, указывает, как пространству времени искривляться, а пространство-время указывает, как материи двигаться.

На вопрос почему свою теорию Эйнштейн назвал теорией относительности, а не теорией гравитации, Эйнштейн ответил: «Под движением тела мы всегда разумеем изменение его положения относительно другого тела. Говорить о движении единственного тела значит противоречить здравому смыслу».

2. Первотолчок и черные дыры

Формулируя закон всемирного тяготения, Ньютон задумался о том, почему во Вселенной есть движение? Согласно второму закону Ньютона всякое ускорение обусловлено силой, представляющей собой действие одного тела на другое. Никакого «самодвижения» в природе не бывает. Но тогда получается, что если одно тело толкает другое, то его в свою очередь толкает третье. Следовательно, необходим некий «первотолчок», запускающий Вселенную, в которой есть движение. Этот первотолчок Ньютон, следуя Аристотелю, отождествлял с Богом [1].

В космологии XX века та же проблема первотолчка возникла как проблема сингулярности в начале Вселенной. В 2005 году вышла книга Р. Пенроуза «Круги Времени» [3] в которой была предложена гипотеза циклической Вселенной. На эту тему Пенроуз прочел лекции во многих университетах мира. В соответствии с этой гипотезой, зоны циклической Вселенной отделены друг от друга событием Большого Взрыва. Эон включает в себя образования элементарных частиц из вакуума, рождение проявленного космоса, развитие косной материи, старение или уменьшение числа материальных частиц, переход в непроявлено состояние.

В соответствии с гипотезой Р. Пенроуза, коллапс сверхмассивных черных дыр перед Большим Взрывом производит возмущения в виде гравитационных волн, которые переживают Большой Взрыв и передают информацию от эона к эону. Эта гипотеза разделила ученых на два лагеря, — тех, кто с воодушевлением воспринял идею циклов времени, и немалый лагерь скептиков.

В циклической Вселенной проблема «первотолчка» уступила место проблеме толчка к рождению нового эона как действия закона периодичности. Так же возникла проблема осознания беспредельности с ее вечным законом циклов дифференциации, взаимоиспытания и синтеза. К тому же, черные дыры и гравитационные волны относились к области гипотетических понятий.

Однако, что касается гравитационных волн и черных дыр, то здесь у физиков были уже некоторые наработки. Гравитационные волны были

предсказаны исходя из Общей теории относительности. А черная дыра как ситуация, когда гравитационное поле звезды или какого-либо космического тела столь сильное, что скорость, необходимая чтобы улететь с него равна скорости света, обсуждалась еще французским математиком Лапласом и английским физиком Митчелом в XVIII веке. Такое тело будет казаться совсем темным, откуда и возникло название черная дыра.

ОТО, в которой скорость света есть предельная скорость любого движения, говорит, что никакая информация не может к нам проникнуть «изнутри» черной дыры, начиная с некоторого расстояния, называемого горизонтом.

Первым объектом, отождествленным с черной дырой, был рентгеновский источник в созвездии Лебедя. Он был обнаружен с помощью американского рентгеновского спутника UNURU. Сама черная дыра не наблюдалась, но рядом с ней находилась обычная звезда и черная дыра втягивала вещество звезды внутрь себя. При этом движущееся с большой скоростью вещество испускало электромагнитное излучение, которое и наблюдалось. Если же допустить, что существуют скорости превышающие скорость света, то черные дыры могут излучать превосходящие все наши представления невообразимо прекрасные, тончайшие излучения, и наше понимание черных дыр может быть совсем иным. Стивен Хокинг заметил: «К черным дырам вряд ли подходит название черные; на самом деле они раскалены до бела». [13] Анализируя работы С. Хокина, В. Шварцмана, Р. Пенроуза, Ф. Цицин в своей работе «Черные дыры — реальность или мираж?» пишет: «Так называемая «черная дыра» (ЧД) — объект пострелятивистский и постквантовый. Это объект пока не известного нам гравитационно-квантового Мира, подчиняющийся его, а не нашим фундаментальным физическим законам. ... Сам термин «ЧД» в применении к соответствующему классу реальных космических объектов, лишен смысла. Ведь еще не известные фундаментальные законы материи в центральной планковской сингулярности не обязаны исключать выброс материи и энергии из этой сингулярности в пределы горизонта ЧД и ДАЛЕЕ. Возможно, это может иметь отношение, в частности, к до сих пор не находящим объяснения выбросам из центральных «точек» активных галактик, вообще к работе загадочной «центральной машины» квазаров и т.п. Возможно, это поможет и понять природу одного из самых загадочных явлений в современной астрономии: так называемого гамма-всплеска. Не исключено, что явление гамма-всплеска связано не «просто» со столкновением звездных масс черных дыр, а инициируется принципиально новым для нашей физики явлением — прямым столкновением планковских сингулярностей сливающихся ЧД.» [12]

Сегодня мы знаем о черных дырах меньше, чем не знаем.

Здесь уместно привести слова нобелевского лауреата физика С. Чандрасекара: «Исследуя явления, связанные с горизонтами событий и невозможностью передать через них информацию, я часто повторял про себя сказку о природе, которую слышал в Индии. Сказка повествовала о личинках стрекоз, живущих на дне пруда. Их постоянно мучила одна загадка: что происходит с ними, когда, став взрослыми, они поднимаются к поверхности пруда, проходят через нее и исчезают, чтобы больше никогда

не вернуться? Каждая личинка, ставшая взрослой и готовящаяся подняться наверх, обязательно обещает вернуться и рассказать оставшимся внизу подругам о том, что происходит наверху. Ведь только так удастся подтвердить или опровергнуть слухи, распространяемые лягушкой: будто бы личинка, пересекающая поверхность пруда и оказавшаяся по другую сторону привычного мира, превращается в удивительное существо с длинным стройным телом и сверкающими крыльями. Но, выйдя из воды, личинка превращается в стрекозу, которая, увы, не может проникнуть под воду пруда, сколько бы она ни пыталась и как бы долго не парила над его зеркальной поверхностью...» [14].

3. Гравитационные волны

Гравитационные волны — это колебания кривизны пространства-времени, распространяющиеся с очень высокой скоростью. Они были предсказаны ОТО, но далеко не все верили в их существование. Усомнился в них даже сам А. Эйнштейн. Дискуссию о реальности гравитационных волн (ГВ) активно вели ученые многих стран. Вторая мировая война прервала эту дискуссию. После войны она возобновились с новой силой. В 1957 г. английский физик Ф. Пиранни обосновал возможность детектирования ГВ. В 1962 г. советские ученые В. Пустовойт и М. Герценштейн описали принципы использования интерферометров для обнаружения ГВ. Интерферометр Майкельсона был известен еще XIX веке, с его помощью пытались зафиксировать «эфирный ветер». Идея использования интерферометров для обнаружения ГВ Пустовойта и Герценштейна не обратила на себя должного внимания.

В 1969 г. Дж. Вебер сообщил об обнаружении им ГВ. В качестве детектора ГВ он применил механические гравитационные антенны.

В начале 70-х гг. В.Б. Брагинский повторил в Москве эксперименты Дж. Вебера, но зафиксировать ГВ не удается.

В течении 45 лет никому не удалось подтвердить опыт Дж. Вебера, физики пришли к мнению, что Дж. Вебер не мог зарегистрировать ГВ. Однако, его работа способствовала бурному росту публикаций, посвященных ГВ, а сам Джозеф Вебер был признан основателем гравитационной астрономии.

Чтобы породить мощную гравитационную волну нужно очень сильно исказить пространство-время. Идеальный вариант — две черные дыры, вращающиеся друг вокруг друга в тесном танце, на расстоянии порядка их гравитационного радиуса. Искажения метрики будут столь сильными, что заметная часть энергии этой пары будет излучаться в гравитационные волны. Теряя энергию, пара будет сближаться, кружась все быстрее, искажая метрику все сильнее и порождая все более сильные гравитационные волны, пока, наконец, не произойдет кардинальная перестройка всего гравитационного поля этой пары и две черные дыры не сольются в одну. Такое слияние черных дыр — взрыв грандиозной мощности, и значительная часть излучаемой энергии уходит в колебания пространства. Аналогичные колебания будут сопровождать и слияния нейтронных звезд [4].

Два объекта излучают гравитационные волны только в паре (притягивающиеся друг к другу и сливающиеся галактики, коллапс двойной системы компактных объектов, слияние черных дыр, нейтронных звезд, ...).

До XX века космология была объектом философии и поэзии и в одном из философских трактатов можно прочесть: «Тяготение — основной закон мироздания. В высших сферах и мирах, тяготение преобразуется в закон Любви и справедливого Сочетания. Чувство является ведущим началом во всем Сущем. Миры начинаются чувством — Любовью, т. к. Любовь уявлена как притяжении и сцеплении энергий».

Этот тезис развил в своей религиозно-философской работе «Послание Молитвы Господней» гениальный ученый и авиаконструктор, вклад которого в развитие воздухоплавания не был превзойден, пожалуй, никем — Игорь Сикорский. Он писал: «Функционирование небесных механизмов дает нам представление о том, что может происходить в явлениях высшего порядка, находящихся вне видимости, где силы гравитации и притяжения заменены доброй волей и любовью в их высшем значении».

4. Гравитационные волны — реальность

В течении ста лет ученые многих стран искали подтверждение существованию ГВ и когда 11 февраля 2016 года было сообщено об обнаружении ГВ, это событие синхронно (буквально минута в минуту) стало известно на всех континентах.

14 сентября 2015 года обновленная обсерватория LIGO (США) зарегистрировала гравитационно-волновой всплеск, порожденный слиянием двух черных дыр. Четыре месяца ушло на проверку полученных данных, на обработку и вычисления. 21 января 2016 г. группа из 1011 (невиданное число!) авторов из 126 научных подразделений из 18 стран направила статью «Наблюдение гравитационных волн от слияния бинарной черной дыры» в журнал «Physical Review Letters». Статья была опубликована 11 февраля 2016 г. Для всего мира это было сенсационным сообщением [5].

Используя теоретические соотношения и параметры полученного сигнала, ученые вычислили массы взаимодействующих черных дыр. Они оказались около 29 и 36 масс Солнца. После слияния общая масса составила примерно 62 массы Солнца. Это означало уменьшение суммарной массы примерно на три массы Солнца. Что, в свою очередь, может означать, что 4,8% энергии черных дыр преобразовалось в гравитационные волны.

В пользу гипотезы Р. Пенроуза о циклической Вселенной это был значительный вклад, но главное, был открыт новый инструмент для изучения Вселенной и происходящих в ней процессов.

Гравитационно-волновая астрономия позволяет заглянуть на расстояния в миллиард световых лет и более. Насколько более? Можем приблизиться к моменту рождения нашей Вселенной? Или как утверждает Роджер Пенроуз, заглянуть за Большой взрыв в предыдущую Вселенную?

5. Метафизика

«Трудно абстрагироваться от концепций и взглядов, представляющихся уже установленными или даже самоочевидными».

А. Эйнштейн

«Прогресс науки постоянно тормозится тираническим влиянием некоторых концепций, которые, в конце концов, стали считаться догмами».

Луи де Бройль

С древних времен метафизика рассматривалась как система исходных представлений об основах бытия, о первичных понятиях и закономерностях мироздания. Метафизика была частью философии, хотя существенный вклад в нее вносили именно естествоиспытатели: Р.Декарт, Г.Галилей, Г.Лейбниц...

Сегодня метафизика рассматривает целый спектр парадигм, среди которых выделяется физическое миропонимание и геометрическое миропонимание [6]. Эйнштейновская Общая теория относительности представляет геометрическое миропонимание.

Уильям Клиффорд в своей работе «О пространственной теории материи» (1870 г.) писал: «Я считаю что:

- 1) Малые участки пространства аналогичны небольшим холмам на поверхности...
- 2) Это свойство искривленности или деформации непрерывно переходит с одного участка пространства на другой наподобие волны.
- 3) Это изменение кривизны есть то, что мы называем движением материи...
- 4) В физическом мире ничего не происходит, кроме таких изменений...»

Американский физик Дж. Уилер в XX веке вторил Клиффорду «В мире нет ничего, кроме искривления пространства. Материя, заряд, электромагнитные и другие поля являются лишь проявлениями искривленного пространства. Физика есть геометрия».

Геометрическое миропонимание уходит в глубь веков, Дж. Уилер в своих работах цитирует ренессансного неоплатоника Ф.Патрици: «Итак, пространство есть то, что было прежде мира (космоса) и будет после него, что стоит во главе мира, ... Разве оно тогда не субстанция? Если субстанция есть то, что лежит в основе, то пространство скорее всего сущность мира». Ф. Патрици в свою очередь поддерживал неоплатоников и геометризацию оптики Роберта Гроссетесте, жившего в первой половине XIII века [7]. Роберт Гроссетесте, пытался объединить геометрическое миропонимание с физическим миропониманием, утверждая квантовую природу света и геометрические законы его распространения.

Так, опираясь на предшественников, порой на многие века опережавших свое время, ученые шаг за шагом шли вперед.

Во второй половине XX века в Советском Союзе, где метафизика трактовалась как реакционное идеалистическое учение, противоречащее «единственно верному» диалектическому материализму, физики активно вели дискуссии по вопросам метафизики.

Примером этому может служить дискуссия, развернувшаяся в 1964 году в Киеве на Первом Всесоюзном симпозиуме «Философские проблемы теории тяготения Эйнштейна и релятивистской космологии». На этом симпозиуме профессор А.З. Петров утверждал: «Поле гравитации — это особый вид материи и потому она, как таковая, проявляет себя в движении и не может двигаться иначе, как в пространстве-времени». Профессор М.Ф. Широков ему возражал: «С физической точки зрения поля тяготения и инерции, как проявления геометрических свойств пространства и времени, следует считать формами существования материи, а не материей». А профессор Д.Д. Иваненко заявлял, что гравитация — частично материя, а частично форма существования материи... [6], [8].

Д.Д. Иваненко был одним из немногих, кто рассматривал ОТО как очень важную, но не окончательную попытку построения единой теории устройства мира, он говорил: «Так или иначе нынешний период истории физики характерен все более настойчивыми и перспективными попытками построения новой, четвертой в исторической последовательности единой картины мира». Он неоднократно выражал сомнения в правильности распространения закономерностей ОТО на описание Вселенной в целом. [9] Ибо признание беспредельности как в познании, так и в бесконечности развития Мира, делают невозможным познание абсолюта, но последовательное, шаг за шагом осознание все новых планов бытия дают человечеству новые возможности творчества.

Сегодня одним из дискуссионных вопросов по поводу которого ведутся споры является вопрос о переходе от римановой геометрии, положенной в основу ОТО к геометрии с кручением.

Ученик Л.В. Келдыша и Д.Д. Иваненко, Г.И. Шипов в 2005 году выступил на конференции в Бельгии с докладом «Механика Декарта — четвертое обобщение механики Ньютона» (Shipov G. // *Decartes' Mechanics — Fourth Generalization of Newtons Mechanics*. In «7th Intern. Conference Computing Anticipatory Systems», НЕС-ULg, Liege, Belgium, 2005).

В своей статье «Механика Декарта — четвертое обобщение механики Ньютона» Геннадий Шипов пишет: «Хотя механика Ньютона обобщалась уже трижды: при создании специальной теории относительности, ОТО и квантовой механики, существует возможность для ее дальнейшего обобщения.

Перед созданием Ньютоном основ механики (1687 г.) Рене Декарт отстаивал точку зрения, что всякое движение есть вращение. Это утверждение удается доказать последовательно только сейчас, используя богатый арсенал математических и физических идей современной науки, выдвинутых в разное время выдающимися учеными. Четвертое обобщение механики Ньютона оказалось возможным при условии, что в уравнениях механики Декарта реализуются:

Проблема Клиффорда-Эйнштейна по геометризации.

Эрлангенская программа Клейна.

Идея Картана о связи кручения пространства с физическим вращением.

Идея Кармели об объединении поступательной и вращательной относительности.

Идея Пенроуза об одинаковом законе преобразований для трансляций и вращений.

Идея Уиллера о геометрической природе спинорных полей.

Идея Декарта о вращательной природе любого движения.»

Отличительной чертой механики Декарта или вакуумной механики является принцип объединения поступательной и вращательной относительности. Этот принцип утверждает относительность всех физических полей и взаимодействий.

В философских трактатах давно уже можно было встретить идею об объединении закона ритма с законом циклов. Одним из различий между циклическим законом и законом ритма является разность направлений. Циклический закон направляет определенные формы энергии и материи по окружной траектории; ритмический закон побуждает материю, внутри которой он действует к возвратно-поступательному движению и задает его границы. Циклический закон направляет энергию в необходимые круговые каналы; закон ритма направляет течение силы — и субстанции — внутри этих каналов. Например, ритмический закон управляет актом дыхания путем своего возвратно-поступательного воздействия на клетки дыхательных центров; циклический закон определяет путь составных частиц воздуха, втянутых в легкие с помощью дыхания, и направление кровотока, когда тот входит в сердце и покидает его (малый легочный круг кровообращения) — и делает он это точно так же, как направляет ход планет по их орбитам вокруг Солнца.

«Всякая вибрация во всей материи движется в совершенном ритме. Как бы малы ни были атом, клетка или орган силы или субстанции, энергия, которая принудила их к внешнему выражению, установила в их начальном центре колебания вперед и назад, внутрь и наружу, в точном соотношении. Если эта мера нарушается, то происходит перемена в строении силы или субстанции. Если бы возможно было увеличить частоту вибрации атома за пределы установленные ему законом ритма, то атом перестал бы существовать на своем плане бытия».

Гипотеза циклической Вселенной Пенроуза так же объединяет циклы эонов с ритмом отдельных фаз эона. Циклический закон определяет продолжительность эона; ритмический закон управляет качествами (диапазонами частот или уровнем вибраций) действующими в промежутка между определенными фазами жизни эона, — молодости, зрелости, старости, ...

Объединение поступательной и вращательной относительностей лежит в основе теории физического вакуума [10]. Уравнения физического вакуума (они же уравнения вакуумной механики или механики Декарта — четвертого обобщения механики Ньютона), описывающие 10-ти мерное пространство событий с четырьмя трансляционными и шестью вращательными координатами, полностью геометризованные уравнения Эйнштейна и Янга–Миллса, описывают физический вакуум из которого рождаются элементарные частицы. «А если мы знаем как устроен физический вакуум, из которого рождаются элементарные частицы, то мы можем знать как устроены сами частицы и можем описать их взаимодействие».

В теории, построенной с учетом вращательной относительности, нет двух категорий (пространства-времени и материальных источников),

а есть только закрученное и искривленное пространство Вайценбека. Следуя Клиффорду, можно теперь сказать, что в мире ничего не происходит кроме изменения кривизны и кручения пространства, поскольку материальные источники сведены к кручению Риччи. [15]

Здесь, конечно, возникает вопрос как торсионные поля (поля кручения) физического вакуума связаны с гравитационными волнами. Если торсионное поле связано с волновой функцией квантовой механики (как у Г.И. Шипова), то оно должно быть источником гравитационных волн. Но в целом, сегодня мы можем сказать, что знаем о гравитационных волнах меньше, чем не знаем... Теоретические исследования, эксперименты и метафизические дискуссии продолжаются.

6. Лирика

Когда в начале 1970-тых г.г. В Киеве, в подвале гостиницы «Феофания» группа физиков под руководством академика АН УССР А.З. Петрова собрала детектор по улавливанию гравитационных волн (копию установки В.Б. Брагинского), физики в шутку нарисовали на вакуумной камере философа Диогена. Вакуумная камера представляла собой металлическую бочку, и Диоген, сидя в «бочке», прислушивался к «гравитационной музыке небесных сфер» [11].

Частота (вибрация) зафиксированного LIGO сигнала от гравитационных волн в 2015 г. совпала с диапазоном частот человеческого голоса (хотя физически эти явления различные) и ученые смоделировали сигнал от гравитационных волн в звуковой форме. В результате был услышан так называемый chirping или «щелбание», — мы услышали «музыку гравитационных волн»...

Гравитационные волны — рябь пространства,
Я плыву по ним из-за своего упрямства,
Из упрямства доплыть до Вечности-Пристани,
Чтоб узнать секрет Бесконечности — Истины,
И вернуться назад, где пирог в печи, —
Это близко совсем, как звезда в ночи...

P.S. Сегодня ровно год, как сигнал от гравитационных волн от слияния двух черных дыр в далеком космосе был зарегистрирован учеными на Земле.

14 сентября 2016

Использованная литература

1. А.А. Гриб. «Основные представления современной космологии», Физматлит, Москва, 2008
2. Я.И. Перельман. «Занимательная физика», Наука, Москва, 1972
3. Р. Пенроуз. «Циклы времени. Новый взгляд на эволюцию Вселенной». — Москва, Бином. Лаборатория знаний. 2014

4. И. Иванов. Журнал «Открытия и гипотезы», №3, 2016
5. Л.Ф. Черногор. Журнал «Наука и Техника», №4 (119), 2016
6. Ю.С. Владимиров. «Метафизические парадигмы в трудах отечественных физиков-теоретиков второй половины XX века», «Исследования по истории физики и механики», «Наука», Москва, 2004
7. М. Симаков. «Восточная философия и современная наука», Серия «Математика и культура», Москва, 2004
8. «Философские проблемы теории тяготения Эйнштейна и релятивистской космология» (Труды Всесоюзного Симпозиума, Киев 1964 г.) Из-во «Наукова думка», Киев, 1964
9. Ю.С. Владимиров. «Метафизические проблемы теории гравитации и космологии», МГУ, 2012
10. Г.И. Шипов. «Теория физического вакуума», Москва, «Наука», 1997
11. «У пошуках гравітаційних хвиль: шлях до відкриття, тріумф, перспективи», Інтерв'ю Олени Мележик з В.І. Ждановим і Ю.В. Штановим, Київ, 2016
12. Ф. А. Цицин. «Исследования по истории физики и механики», Москва, «Наука», 2002
13. С. Хокинг. «От Большого Взрыва до Черных Дыр», Москва, Из-во «Мир», 1990
14. Ю.В. Мизун, Ю.Г. Мизун. «Тайны Вселенной», Москва, Из-во «Вече»,
15. Г.И. Шипов. «Теория физического вакуума. (В популярном изложении)». Москва, «Кириллица», 2002

Дискусійний клуб

Discussion club

ДИСКУСІЙНЕ ПИТАННЯ

Багато століть люди намагалися зрозуміти значення символів древніх клейнодів. У тому числі всіляких свастик (коловоротів) на них. Сьогодні ми маємо багаточисельні фотографії космічних об'єктів, зроблених за допомогою сучасних телескопів. Ці фото демонструють нам різноманітність космічних коловоротів, дуже схожих на зображення старовинних символів. Цими космічними коловоротами виявилися спіральні галактики. Можливо, фізична природа цих космічних об'єктів допоможе нам пізнати таємницю старовинних клейнодів і навпаки, — старовинні клейноди допоможуть вчням зрозуміти фотографії космічних апаратів.

Звернемося до сучасної енциклопедії «Відкритий космос» (Видавництво «Ранок», 2010):

«У давні часи людина вважала свою планету центром Всесвіту. У точній відповідності з такими поглядами були створені й системи світобудови — із Землею в центрі та іншими світилами, що обертаються навколо неї. Однак уже в 16 столітті Земля втратила своє чільне положення і перетворилася на одну з численних планет Сонячної системи. Але і Сонце виявилось рядовою зіркою з числа найскромніших. А далі були галактики...

Галактика з її мільярдами зірок утворює складну систему, що обертається навколо спільного центру. Усі галактики, схожі на нашу, мають спіральну структуру — у площині їхнього диска чітко виділяються спіральні закручені ущільнення, які називають «рукавами» («рукава» — це скупчення мільярдів зірок, народжених галактикою, що утворюють коловоріт). У нашій галактиці їх п'ять — Рукав Лебедя, Рукав Оріона, Рукав Персея, Рукав Стрільця і Рукав Центавра.

Проаналізувавши дані про більш ніж 20 тис. галактик, дослідники прийшли до висновку, що практично всі вони в минулому зустрічалися з іншими зоряними системами. Деякі галактики в результаті взаємодії можуть з'єднуватися чи повністю зливатися».

Вчені неодноразово спостерігали з'єднання великих галактик із декількома малими. У 2015 році за допомогою телескопа Very Large Telescope ESO було зареєстровано злиття трьох галактик («The Bird»).

Дуже красива картина, наприклад, з'єднання двох коловоротів, — великої лівобічної галактики NGC 2207 з малою правобічною галактикою IC 2163 (фото 1). Таких прикладів багато.

Говорять «як на Небі, так і на землі», як в макрокосмі, так і в мікркосмі. І сьогодні вчені досліджують елементарні лівобічні та правобічні вихори, що пронизують увесь простір.



Фото 1. З'єднання двох галактик

Так може древні вожді і жреці мали знання про Всесвіт, яке потім людство втратило? А самі символи законів космічного устрою служили знаками влади посвячених та оберегами проти хаосу і руйнування?

Чому так могло статися? Може тому, що тисячі років тому панував дедуктивний (інтуїтивний) спосіб пізнання світу, котрий з розвитком ментальних здібностей людства, розвитком аналізу явищ та логічних висновків, призвів до індуктивного методу пізнання?

Прозріння предків забулися, але символи залишилися.

Сьогодні, коли наука йде до синтезу дедуктивного та індуктивного методів пізнання світу, археологічні знахідки далеких часів мають особливий інтерес.

ПРИГОДИ ОДНОГО КЛЕЙНОДА

В. В. Отрощенко

Анотація. У статті здійснено спробу проаналізувати систему образів Карпато-Мікенського орнаментального стилю з виходом на їх семантику. Базові елементи стилю відбивають протистояння сил Світла (солярна символіка) й Пітьми (образ змія / дракона). На динамічному дуалізмі побудовані епічні міфи індоіранських племен. Сюжети міфів дозволяють ідентифікувати мотиви та образи орнаментального стилю на атрибутах влади (клейнодах), деталях кінської вузди, зброї та прикрасах.

Секотного літа 1998 року Центрально-Донбаська експедиція Інституту археології Національної академії наук України проводила черговий польовий сезон на розкопках поселення зрубної спільноти Капітанове 1 у Новоайдарському р-ні Луганської обл. Начальником експедиції був тоді ще молодий науковець Юрій Бровендер, а науковим консультантом — автор цих рядків. При дослідженні котловану житла 18/20 почастило виявити два уламка загадкового рогового виробу, схожого на шляпку гриба з короткими виступами-ніжками. Коли ці крихітні шматочки рогу дбайливо помили, підсушили й склеїли то з вуст обох згаданих дослідників зірвався ємний вигук: «клейнод»! А ще більшим приводом для захоплення стала запаморочлива циркульна композиція на лицевій сфері «шляпки» (Рис. 1, 1). Тут до камерального столу під тентом підійшов третій учасник експедиції, доцент Воронежського університету Володимир Бесєдін й з широкою посмішкою вставив ще чотири слова: «Так называемая микенская волна». Відразу ж зазначу, що у висловлених оцінках немає жодних суперечностей. Ми з Юрієм визначили функцію артефакту, а російський колега — декоративний стиль оформлення голівки скіпетра. Він тоді мабуть пожалкував, що в переданій ним до друку статті «Микенский» орнаментальний стиль епохи бронзи в Восточной Европе» не буде такої доречної ілюстрації [2, с. 45–57, рис. 2–4].

З реакції на знахідку видно, що дослідники виявилися готові до неї й на те були вагомими підстави. На тему клейнодів автор вийшов ще наприкінці 70-х років, досліджуючи соціальну структуру зрубної спільноти (18–13 ст. до Хр.). Першою категорією артефактів, ототожненими з клейнодами стали батоги (нагайки), від яких у похованнях лишалися кістяні руків'я та голівки з отвором для фіксації шнурів гнучкої частини батога [11, с. 227–231, рис. 1, 2–5]. Публікація статті щодо нагайок збіглася в часі з відкриттям супернагайки (довжина дерев'яного стрижня з роговими руків'ям, набірними кільцями та голівкою — 80см). Її знайшли в пох. 9, кург. 1 біля с. Красносьолка Самарської обл. РФ. Автори розкопок А. Іва-

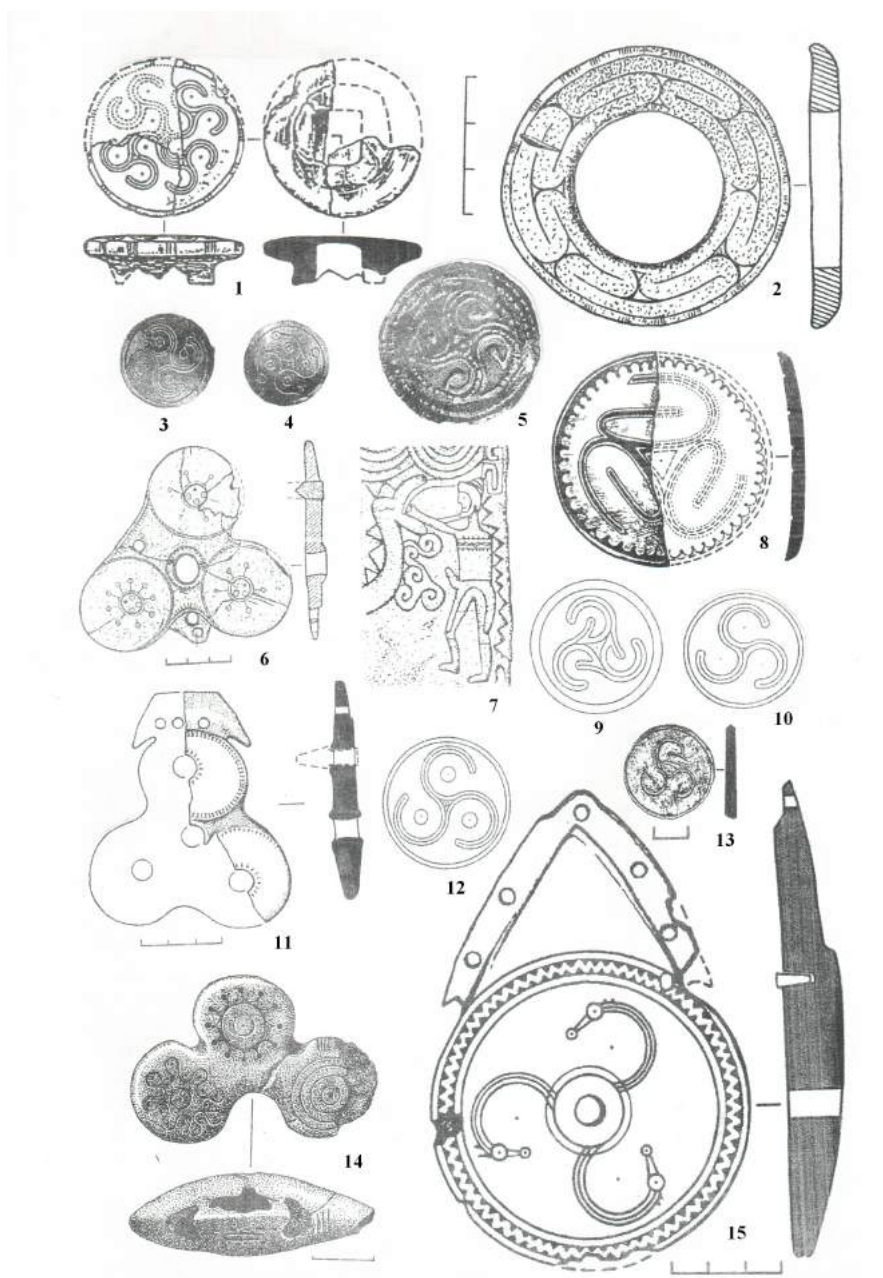


Рис. 1. Зразки декору Карпато-Мікенського орнаментального стилю: 1, 8 — с. Капітанове-1; 2 — с. Іллічівка; 3-5, 9, 10, 12 — Мікени; 6 — Бараніковка Волгоградської обл.; 7 — Разлог; 11- Тарумовка; 13 — Шипилівка; 14 — Кіровське поселення; 15 — Нижня Красавка II. 1, 2, 6, 8-15 — кістка, ріг; 3-5 — метал; 7 — камінь. 1, 8 — за Бровендер, 2000; 2-5, 9, 10, 12, 13 — за Литвиненко, Санжаров, Усачук, 2013; 6, 11, 15 — за Лопатин, 2014; 7 — за Lichardus, Vladár, 1996; 14 — за Отроценко, 1974.

нов та Ю. Колев, нарекли знахідку «жезлом». Автор переконав колег надати публікацію жезла до журналу «Археологія» й здійснив переклад тексту [7, с. 92–100, рис. 2–3]. Ну й у пакеті подав статтю «Клейноди зрубного суспільства» [12, с. 101–109, рис. 1–2].

Важливо, що рогові та кістяні елементи клейнодів здебільшого декорували в стилі «мікенської хвилі». З часом цей стиль орнаментативної на камені, дереві, кістці та метали стали називати «Карпато-Мікенським». Топонім «Мікени» у назві стилю з'явився не випадково. Пошуки усипальниці легендарного базилевса Агамемнона привели колись не менш легендарного дилетанта-археолога Генріха Шлімана до некрополів знаменитого міста. Звідти походить найбільша колекція артефактів, декорованих у названому стилі, а золоту маску найсуворішого з розкопаних у поховальному колі «А» владик найменовано «Агамемноном» [13, taf. XVIII, 308, 309].

Розкопки на поселенні Капітанове-1 дали найбільшу на теренах України колекцію кістяних та рогових виробів, декорованих у Карпато-Мікенському стилі [4, с. 53–55, рис. 1, 3; 2]. Згаданий на початку розповіді клейнод став у ній четвертим і найзагадковішим за семантикою сакрального візерунку. Діаметр рогової частини клейноду — 3,4 см, висота — 1,0 см. Зі зворотної сторони виробу фіксується квадратна лунка (1,2 x 1,2 см), глибина її — 0,8 см (Рис. 1,1). Її призначення — фіксація верхньої частини дерев'яного держака жезлу, діаметр якого міг бути 1,6–2,0 см, а довжина — 0,5–0,8 м. Усі декоровані вироби пов'язані з другим стратиграфічним горизонтом поселення й датуються початковою фазою другого періоду Покровської зрубної культури [3, с. 178, рис. 2, 10]. В абсолютних датах це не пізніше 16 ст. до Хр., з переконливою прив'язкою датування до шахтових та склепінчастих усипальниць Мікен [8, с. 195].

Звичайно, що в критично налаштованого читача може постати запитання: «Чи уявляєте ви де Луганщина, а де Мікени й що між архітекторами першої цивілізації в Європі та варварами з її далекого сходу могло бути спільного?». Ще років 20–30 назад такий погляд панував і серед археологів. Проте, польові відкриття останньої третини 20-го — початку 21-го ст., зокрема феномену Синташтинської культури бойових колісниць рубежу III–II тис. до Хр. істотно відкоригувало наші уявлення щодо подій 2-ї половини II тис. до Хр. На Південному Уралі виявили рештки найдавніших колісниць з колесами на шпичках [5, с. 204–206, рис. 107–108], а усипальницях колісничних — деталі кінської вузди з виробами в Карпато-Мікенському стилі. Це дозволило В. Беседіну поставити питання щодо східноєвропейського (місцевого) походження цього стилю [1, с. 84–86, рис. 1; 2, с. 53–57, рис. 2–4]. Спочатку гіпотеза В. Беседіна (1954–2000) була піддана жорсткій критиці, але нині вона знаходить усе більше обережних прибічників [8, с. 193–194]. Понад те, вийшло друком дослідження щодо приходу правителів Мікен на Пелопоннес з Дніпро-Донського степового ареалу ранніх іранських племен. Угорський дослідник Я. Маккай скопіював клейноди зі згаданих у другому абзаці статей та використав їх як аргумент на користь своєї гіпотези [15, р. 56–65, fig. 10–12 and map]. Утім, проблема походження «Мікенського» стилю лишається дискусійною.

Визначившись з культурною належністю та часом виготовлення клейноду з Капітанового-1 спробуємо підійти до розгадки семантики складної

орнаментальної композиції, виведеної за допомогою циркуля на його голівці. Ми маємо лівобічну вихрову свастику в центрі, що перетікає в чотири правобічні трискеліони на периферії композиції. Припущення Наталії Кондратьєвої, що сукупно це знак, який репрезентує синтез основних символів-знаків існування Всесвіту, сформульоване на базі знань XXI ст. Археологу його коментувати складно. Наше завдання: зрозуміти який сенс вкладали в це сполучення символів люди бронзової доби десь 3600 років тому. Виходимо з того, що названий стиль складається з комбінацій солярних та хвилястих композицій. Причому «хвиля» в циркульному чи різьбленому виконанні фігурує в назві стилю, хоча за кількість відтворених елементів солярна складова помітно переважає (Рис. 1, 1, 3–6, 9–15). Серед наведеної на рис. 1 підборки артефактів хвиля домінує на блясі з отвором з поселення Іллічівка на Сіверському Дінці в Донецькій обл. (Рис. 1, 2) та цільній блясі з Капітанового-1 (Рис. 1, 8).

Маємо припустити момент протистояння між солярними образами, як темою світла, та масними іпостасями «хвилі» за якими вбачаються образ плазуна (змія, дракона). Реальність такого протистояння підтверджується не лише епічними сюжетами «Рігведи» та «Авести», але й епізодом, різьбленим на одній зі стел з Разлог у Болгарії [14, s. 67, taf. 4, 4a]. На ній ми бачимо перемогу чоловічого фалічного персонажа над великим плазуном, а з ураженої героєм пащі тут-таки вискакують чи утворюються трискеліони (Рис. 1, 7). Виходячи з такої підказки можна припустити на блясі з Іллічівки зображення змія в силі, що замикає й контролює коло, а на блясі з Капітанового-1 — вже маємо розрубане на три частини тіло плазуна, яке знову-таки компонується в образ трискеліона (Рис. 1, 8). Далі на гудзику з Мікен гравійовано трискеліон із «рубцями» зшивки (Рис. 1, 9), а поряд — на іншому гудзику — завершений трискеліон (Рис. 1, 10). Це точна копія аналогічних чотирьох образів зі Капітанівського клейнода. Наступний гудзик з Мікен збагачує вигини трискеліона циркульними колами з крапкою в центрі (Рис. 1, 12). Паралельно ця схема реалізувалася в елементах кінської вузди (псалії, бляхи-розподільвачі пасків оголів'я, застібки), утворюючи трійці (тримурті, триратні), насичені солярною символікою [9, с. 280, рис. 40, 1, 9]. Один із найпізніших зразків «Мікенського» стилю кістяна застібка з Кіровського поселення в Східному Криму, де циркульний солярний мотив присутній на кожній з трьох пелюсток, але лише на нижній лівій він оповитий хвилею зміїного образу (Рис. 1, 14) [10, с. 74, рис. 2]. Таке собі нагадування, що перемога світла над п'тьмою ніколи не буде остаточною.

Унікальною є знахідка на поселенні Покровської зрубної культури Нижня Красавка II в Саратовській обл. РФ дискового псалія з трикутною планкою, прикрашеного різьбленим трискеліоном зі стилізованою кінською голівкою на кінчику кожного з трьох завитків [9, с. 277, рис. 37, 1]. Це засвідчує здатність трійці до еволюції й продукування нових образів, запліднених новими смислами. Можливо кінськими голівками закінчуються й завитки трискеліона на крихітному диску з поховання зрубної спільноти біля с. Шипилівка Луганської обл. (Рис. 1, 13) [8, с. 195], а також на деяких гудзиках з вихровою свастикою з Мікен (Рис. 1, 3–5).

Аби запропонований вище дуалістичний підхід до інтерпретації композицій «Мікенського» стилю не здавався надуманим, пошлюся на посту-

лати маніхейства — пізнього різновиду заратуштризму. Мані (216–277) сповідував дуалістичне протистояння та боротьбу двох царств Світла та Пітьми, які керувалися, відповідно — Батьком Величі та Князем Пітьми. Конфлікт між ними призвів до змішування (розчинення) сил світла (добра) з еманациями пітьми (зла). Людство в особі Першолюдини (Ормиза) стало жертвою змішування. В ролі рятівника людства виступив Михрйязд (бог Митра). Трупні забитих ним демонів стали будівельним матеріалом чинного світу. Зокрема, зі шкур переможених демонів були створені небеса, з їхніх кісток — гори, а з їх м'яса та випорожнень — землі. Тому побудований Митрою світ, за всієї його досконалості, виявився таки змішаним [6, с. 344–345].

Мотиви та образи «Мікенського» стилю знайшли свій розвиток, як архетипи, в мистецтві іраномовних кіммерійців, скіфів та сарматів та, не виключено, їхніх північних сусідів — праслов'ян.

Література

1. Беседин В. И. «Микенские» орнаменты в Восточной Европе // Северо-Восточное Приазовье в системе евразийских древностей (энеолит — бронзовый век). — Донецк, 1996. — Часть 1. — С. 84–87.
2. Беседин В. И. «Микенский» орнаментальный стиль эпохи бронзы в Восточной Европе // Евразийская лесостепь в эпоху металла. — Археология восточноевропейской лесостепи. — Воронеж, 1999. — Вып. 13. — С. 45–59.
3. Бровендер Ю. М. Капитаново-1. Поселение покровской срубной культуры в Северскодонецком Левобережье // Старожитності Степового Причорномор'я і Криму. — Запоріжжя, 2000. — VIII. — С. 170–186.
4. Бровендер Ю. М., Отрощенко В. В. Карпато-Микенский орнаментальный стиль в материалах поселения Капитаново-1 // Доно-Донецкий регион в системе древностей эпохи бронзы восточноевропейской степи и лесостепи. — Воронеж, 1996. — Вып. 2. — С. 53–55.
5. Генинг В. Ф., Зданович Г. Б., Генинг В. В. Синташта. Археологические памятники арийских племен Урало-Казахстанских степей. — Челябинск, 1992. — 1.
6. Дрезден М. Мифология древнего Ирана // Мифология древнего мира. — Москва, 1977. — С. 337–365.
7. Иванов А. Ю., Колев Ю. И. Зрубный комплекс с роговим «жезлом» із Середнього Заволжя // Археологія. — 1993. — № 1. — С. 92–101.
8. Литвиненко Р. О., Санжаров С. М., Усачук А. М. Кістяний диск з карпато-мікенським декором із Середнього Подонців'я та деякі питання хронології зрубної культури // Донецький археологічний збірник. — Донецьк, 2013. — № 17. — С. 180–198.
9. Лопатин В. А. Начало эпохи поздней бронзы на севере Нижнего Поволжья. — Саратов, 2014.
10. Отрощенко В. В. Элементы изобразительности в искусстве племен срубной культуры // Советская археология. — 1974. — № 4. — С. 72–81.

11. Отрощенко В. В. Костяные детали плеток из погребений срубной культуры // Советская археология. — 1986. — № 3. — С. 72–81.
12. Отрощенко В. В. Клейноды зрубного суспільства // Археологія. — 1993. — № 1. — С. 101–109.
13. Caro G. Die Schachtgräber von Mykenai. — München, 1930.
14. Lichardus J., Vladár J. Karpatenbecken — Sintašťa — Mykene ein Beitrag zur definition der bronzezeit als Historischer epoche // Slovenská Archeológia. — Nitra, 1996. — Ročník XLIV. — Číslo 1. — S. 25–89.
15. Makkey J. The early Mycenaean rulers and the contemporary Early Iranians of the Northeast. — Budapest, 2000.

ЗМІСТ

ГЕОМЕТРИЯ У ДОСЛІДЖЕННІ СКЛАДНИХ СИСТЕМ	3
<i>Yuri I. Manin.</i> Time Between Real and Imaginary: what Geometries Describe Universe near Big Bang?	5
<i>G. Galperin, A. Plakhov.</i> Billiards, invisibility, and perfectly streamlining objects	25
<i>V. D. Rusov, V. A. Tarasov, V. N. Vashchenko, S. A. Chernezhenko, A. A. Kakaev, O. I. Pantak.</i> Fast traveling-wave reactor of the channel type	36
<i>Н. В. Кондратьева.</i> Философские аспекты гравитационной астрономии. Геометрическое миропонимание	58
ДИСКУСІЙНИЙ КЛУБ	69
<i>Дискусійне питання.</i>	71
<i>В. В. Отрощенко.</i> Пригоди одного клейнода	73

CONTENTS

GEOMETRY IN THE STUDY OF COMPLEX SYSTEMS	3
<i>Yuri I. Manin.</i> Time Between Real and Imaginary: what Geometries Describe Universe near Big Bang?	5
<i>G. Galperin, A. Plakhov.</i> Billiards, invisibility, and perfectly streamlining objects	25
<i>V. D. Rusov, V. A. Tarasov, V. N. Vashchenko, S. A. Chernezhenko, A. A. Kakaev, O. I. Pantak.</i> Fast traveling-wave reactor of the channel type	36
<i>N. Kondratieva.</i> Philosophic aspects of gravitational astronomy. Geometrical conception of the world (<i>Russian</i>)	58
DISCUSSION CLUB	69
<i>Discussion question</i> (<i>Ukrainian</i>).	71
<i>V. Otroschenko.</i> Adventures of a kleinod (<i>Ukrainian</i>)	73

ТЕМАТИКА ТА МЕТА ЖУРНАЛУ

«Міждисциплінарні дослідження складних систем» — це рецензований журнал із вільним доступом, що публікує дослідницькі статті, огляди, повідомлення, дискусійні листи, історичні та філософські студії в усіх областях теорії складних систем для впровадження взаємодії між науковцями з різних галузей математики, фізики, біології, хімії, інформатики, соціології, економіки та ін. Ми бажаємо запропонувати істотне джерело актуальної інформації про світ складних систем. Журнал має стати частиною наукового форуму, відкритого та цікавого як для експертів з різних областей, так і для широкої аудиторії читачів: від студентів до досвідчених дослідників. Журнал надає можливість для науковців з різних галузей презентувати нові ідеї, гіпотези, піонерські дослідження. Особливо запрошуються до публікації автори наукових статей та (але не тільки) наукових оглядів, проте статті з історії та філософії науки, інформації про наукові події, дискусійні повідомлення також вітаються.

ІНФОРМАЦІЯ ДЛЯ АВТОРІВ

Журнал друкує оригінальні статті, огляди, повідомлення українською, російською, англійською та німецькою мовами. Статті українською та російською мовами мають містити переклад англійською назви статті, анотації та прізвищ авторів.

Статті приймаються виключно в електронному вигляді, файли мають бути підготовлені в \LaTeX чи в текстовому процесорі (Microsoft Word, Open Office Writer і т. д.). Інші формати файлів мають бути попередньо узгоджені з редакцією. Ілюстрації мають бути високої якості, графіки та діаграми, що підготовлені в інших програмах, мають подаватися окремо, у висхідному форматі. Журнал друкується чорно-білим, проте у електронній версії матеріали будуть відображені у кольорі.

Статті, запитання, поради мають бути відправлені електронною поштою до редакції за адресою: iscsjournal@gmail.com.

AIMS AND SCOPE

“Interdisciplinary Studies of Complex Systems” is a peer-reviewed open-access journal, which publishes research articles, reviews, letters, discussions, historical and philosophical studies in all areas of the complex systems theory in order to provide the interaction between scientists working in different areas of Mathematics, Physics, Biology, Chemistry, Computer Science, Sociology, Economics etc. We would like to promote the significant source of up-to-date information on complex systems worldwide. The journal shall be a part of the scientific forum, open and interesting for experts from several areas and for a broad audience from students to senior researchers. The journal shall give a possibility for scientists from different disciplines to present new ideas, conjectures and pioneering developments. The research papers and (but not only) reviews are especially encouraged. At the same time, papers in the history and philosophy of science, information about scientific events, discussion papers will welcome.

TO AUTHORS

The journal publishes original articles, reviews, information on English, Ukrainian, Russian, and German. Russian and Ukrainian articles should contain English translations of a title, an abstract and authors' names.

The submitted articles should be in an electronic form only. Files should be prepared in L^AT_EX or in a text-processor program like Microsoft Word, Open Office Writer etc.). Other formats of files might be accepted by the previous agreements with editors only. Pictures should have the high quality, graphs and diagrams which are prepared in external programs must be submitted separately in the original format. The journal is published ‘black-and-white’ however the electronic version will represent the full color of all materials.

Articles, questions, and advices should be sent to the editorial office by e-mail: icsjournal@gmail.com.

Наукове видання

МІЖДИСЦИПЛІНАРНІ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

Номер 9

Головний редактор — **В. П. Андрущенко**
Виконавчий редактор — **Ю. Г. Кондратьєв**
Секретар — Л. В. Савенкова
Редагування, коректура — Л. Л. Макаренко
Підготовка оригінал-макету — О. Л. Шаповалова

Підписано до друку 22 листопада 2016 р. Формат 70 × 108/16. Папір офсетний. Гарнітура ComputerModern. Друк офсетний. Умовн. друк. аркушів 7,35. Облік. видав. арк. 6,23.

ВИДАВНИЦТВО

Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова.

01030, м. Київ, вул. Пирогова, 9.

Свідоцтво про реєстрацію № 1101 від 29. 10. 2002

(044) тел. 239-30-85