Національний Педагогічній Університет
імені М. П. Драгоманова

Міждисциплінарний науково-дослідний центр
складних систем

Dragomanov National Pedagogical University

Interdisciplinary research center
for complex systems

МІЖДИСЦИПЛІНАРНІ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

INTERDISCIPLINARY STUDIES OF COMPLEX SYSTEMS

Номер 16 • Number 16

Київ • Kyiv
2020

УДК 001.5
М57

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації
серія КВ № 23840-13680Р від 27 березня 2019 року

Рекомендовано до друку Вченою радою Національного педагогічного університету
імені М. П. Драгоманова (протокол № 10 від 7 травня 2020 року)

М 57 Міждисциплінарні дослідження складних систем : [збірник наукових праць]. — Номер 16. — Київ : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2020. — 122 с.

ISSN 2307-4515 — Print
ISSN 2415-3761 — Online

УДК 001.5

Математика.
Філософські аспекти математики

Mathematics. Philosophical aspects of mathematics

Interdisciplinary Studies of Complex Systems
No. 16 (2020) 5–32

https://doi.org/10.31392/iscs.2020.16.005

From random times to fractional kinetics

Anatoly N. Kochubei[1], *Yuri Kondratiev*[2], *José Luís da Silva*[3]

Abstract. In this paper we study the effect of the subordination by a general random time-change to the solution of a model on spatial ecology in terms of its evolution density. In particular on traveling waves for a non-local spatial logistic equation. We study the Cesaro limit of the subordinated dynamics in a number of particular cases related to the considered fractional derivative making use of the Karamata Tauberian theorem.

Keywords: Bernstein functions, general fractional derivative, configuration space; Karamata's Tauberian theorem, subordination principle, traveling waves

1 Introduction

A study of a random time change in a Markov process X_t was initiated by S. Bochner [7] by considering an independent Markov random time ξ_t. The resulting process $Y_t = X_{\xi_t}$ is again Markov and is called a subordinated process. In a pioneering work [33], T. Kolsrud initiated the study of the general independent random time process. Later the concept of a random time change became an effective tool in the study of physical phenomena related to relaxation and diffusion problems in complex systems. We refer here to the section "Historical notes" in [43]. An additional essential motivation for the random time change did appear in applications to biological models. The point is such that there exists a notion of *biological time* specific for each particular type of biological system and which is very different compared to the usual time scale employed in physics. One of the possibilities to incorporate this notion is related to a random time change. Moreover, this approach gives the chance to include in the model an effective influence of dynamical random environment in which our system in located.

An especially interesting situation appears for the case of an inverse subordinator ξ_t. We will describe this framework roughly and leaving the details and more precise formulations in Subsection 2.2 below. The marginal distributions μ_t of a Markov process X_t describe an evolution of states in the considered systems and deliver an essential information for the study of the

[1] Institute of Mathematics of NASU, Kyiv, Ukraine. kochubei@imath.kiev.ua
[2] Bielefeld University, Germany and Dragomanov University, Kyiv, Ukraine. kondrat@math.uni-bielefeld.de
[3] CIMA, University of Madeira, Portugal. joses@staff.uma.pt

dynamics. We call that the statistical dynamics in contrast to the stochastic dynamics X_t which contains more detailed information about the evolution of the system. The statistical dynamics may be formulated by means of the Fokker–Planck–Kolmogorov (FPK) evolution equation (weak sense)

$$\frac{\partial \mu_t}{\partial t} = L^* \mu_t,$$

where L^* is the (dual) generator of the Markov process on states. For an inverse subordinator ξ_t and the process $Y_t = X_{\xi_t}$, denote ν_t the corresponding marginal distributions. The key observation is such that the dynamics of ν_t is described by the evolution equation

$$\mathbb{D}_t^{\xi} \nu_t = L^* \nu_t,$$

where $\mathbb{D}_t^{\xi}$ denotes a generalized (convolutional) fractional derivative in time canonically associated with ξ_t. This fractional Fokker–Planck–Kolmogorov equation (FFPK) gives the main technical instrument for the study of subordinated statistical dynamics. There is a well known particular case of the inverse to stable subordinators. In this case, such standard objects appear as Caputo–Djrbashian fractional derivatives, and all the well developed techniques of fractional calculus work perfectly. But in the case of general inverse subordinators we should think about proper subclasses, for which certain analytic properties of the related objects may be established, see e.g. [11].

Note that there exist two possible points of view. We can start from an inverse subordinator and arrive in FFPK equation [31, 38, 39, 50]. Or, vice versa, we develop at first a notion of generalized fractional derivative and then search for a probabilistic interpretation of the solution. The latter was first realized in [29]. For a detailed discussion of both possibilities see [11].

The aim of this paper is to analyze the effects of random time changes on Markov dynamics for certain models of interacting particle systems in the continuum. For the concreteness, we will consider the important Bolker–Pacala model in the spatial ecology that is a particular case of general birth-and-death processes in the continuum. The scheme of our study is the following. The FPK equation for the states of the model may be reformulated in terms of a hierarchical evolution of correlation functions. In a kinetic scaling limit this system of equations leads to a kinetic hierarchy for correlation functions and to a non-linear evolution equation for the density of the system. The latter is a Vlasov-type non-linear and non-local evolution equation. Considering a random time change by an inverse subordinator we arrive in the FFPK equation for correlation functions and to a fractional kinetic hierarchy. For a discussion of this approach and certain new properties of fractional kinetic hierarchy see [30].

A surprising feature appearing in the kinetic hierarchy is related to the dynamics of the density of the considered systems. The evolution of the density in the time changed kinetics is not the solution of a related Vlasov-type equation with a fractional time derivative as one may expect. In reality, this dynamics is a subordination of the solution to kinetic equation for the hierarchy in the initial physical time. A particular problem which does appear in this situation is related with an effect of the subordination for such special solutions as traveling waves which are known for the Bolker–Pacala model. In the special case of stable subordinators this question was studied in [12]. In the present paper we are dealing with certain classes of inverse subordinators for which the analysis of subordinated waves may be carried out.

We summarize our observation as follows: a heuristic consideration of a kinetic equation for the density with a fractional time derivative has no relation to the real dynamics in the kinetic limit of the time changed Markov evolution of the model. The correct behavior is given by a subordination of the solution to the kinetic equation in physical time.

2 Preliminaries

2.1 General Facts and Notation

Let $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ be the family of all Borel sets in $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ and let $\mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$ denote the system of all bounded sets in $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

The space of n-point configurations in an arbitrary $Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ is defined by

$$\Gamma^{(n)}(Y) := \big\{\eta \subset Y \big| \, |\eta| = n\big\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

where $|\cdot|$ the cardinality of a finite set. We also set $\Gamma^{(0)}(Y) := \{\emptyset\}$. As a set, $\Gamma^{(n)}(Y)$ may be identified with the symmetrization of

$$\widetilde{Y^n} = \big\{(x_1, \dots, x_n) \in Y^n \big| x_k \neq x_l \text{ if } k \neq l\big\}.$$

The configuration space over the space $\mathbb{R}^d$ consists of all locally finite subsets (configurations) of $\mathbb{R}^d$, namely,

$$\Gamma = \Gamma(\mathbb{R}^d) := \big\{\gamma \subset \mathbb{R}^d \,\big|\, |\gamma \cap \Lambda| < \infty, \text{ for all } \Lambda \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)\big\}. \tag{2.1}$$

The space Γ is equipped with the vague topology, i.e., the minimal topology for which all mappings $\Gamma \ni \gamma \mapsto \sum_{x\in\gamma} f(x) \in \mathbb{R}$ are continuous for any continuous function f on $\mathbb{R}^d$ with compact support. Note that the summation in $\sum_{x\in\gamma} f(x)$ is taken over only finitely many points of γ belonging to the support of f. It was shown in [35] that with the vague topology Γ may be metrizable and it becomes a Polish space (i.e., a complete separable metric space). Corresponding to this topology, the Borel σ-algebra $\mathcal{B}(\Gamma)$ is the smallest σ-algebra for which all mappings

$$\Gamma \ni \gamma \mapsto |\gamma_\Lambda| \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$$

are measurable for any $\Lambda \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$. Here $\gamma_\Lambda := \gamma \cap \Lambda$.

It follows that one can introduce the corresponding Borel σ-algebra on $\Gamma^{(n)}(Y)$, which we denote by $\mathcal{B}(\Gamma^{(n)}(Y))$. The space of finite configurations in an arbitrary $Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ is defined by

$$\Gamma_0(Y) := \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}_0} \Gamma^{(n)}(Y).$$

This space is equipped with the topology of disjoint unions. Therefore one can introduce the corresponding Borel σ-algebra $\mathcal{B}(\Gamma_0(Y))$. In the case of $Y = \mathbb{R}^d$ we will omit Y in the notation, thus $\Gamma_0 := \Gamma_0(\mathbb{R}^d)$ and $\Gamma^{(n)} := \Gamma^{(n)}(\mathbb{R}^d)$.

The restriction of the Lebesgue product measure $(dx)^n$ to $\big(\Gamma^{(n)},\mathcal{B}(\Gamma^{(n)})\big)$ will be denoted by $m^{(n)}$, and we set $m^{(0)} := \delta_{\{\emptyset\}}$. The Lebesgue–Poisson measure λ on Γ_0 is defined by

$$\lambda := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} m^{(n)}. \tag{2.2}$$

For any $\Lambda \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$, the restriction of λ to $\Gamma(\Lambda) := \Gamma_0(\Lambda)$ will be also denoted by λ. The space $\big(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma)\big)$ is the projective limit of the family of spaces $\big\{(\Gamma(\Lambda),\mathcal{B}(\Gamma(\Lambda)))\big\}_{\Lambda\in\mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)}$. The Poisson measure π on $\big(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma)\big)$ is given as the projective limit of the family of measures $\{\pi^\Lambda\}_{\Lambda\in\mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)}$, where $\pi^\Lambda := e^{-m(\Lambda)}\lambda$ is the probability measure on $\big(\Gamma(\Lambda),\mathcal{B}(\Gamma(\Lambda))\big)$. Here $m(\Lambda)$ is the Lebesgue measure of $\Lambda \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$.

For any measurable function $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ we define the *Lebesgue–Poisson exponent*

$$e_\lambda(f,\eta) := \prod_{x\in\eta} f(x), \quad \eta \in \Gamma_0; \qquad e_\lambda(f,\emptyset) := 1. \tag{2.3}$$

Then, by (2.2), for $f \in L^1(\mathbb{R}^d, dx)$ we obtain $e_\lambda(f) \in L^1(\Gamma_0, d\lambda)$ and

$$\int_{\Gamma_0} e_\lambda(f,\eta)\, d\lambda(\eta) = \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx\right). \tag{2.4}$$

A set $M \in \mathcal{B}(\Gamma_0)$ is called bounded if there exists $\Lambda \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d))$ and $N \in \mathbb{N}$ such that $M \subset \bigsqcup_{n=0}^{N} \Gamma^{(n)}(\Lambda)$. We will make use of the following classes of functions on Γ_0: (i) $L^0_{\mathrm{ls}}(\Gamma_0)$ is the set of all measurable functions on Γ_0 which have local support, i.e., $H \in L^0_{ls}(\Gamma_0)$, if there exists $\Lambda \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$ such that $H \restriction_{\Gamma_0\setminus\Gamma(\Lambda)} = 0$, while (ii) $B_{bs}(\Gamma_0)$ is the set of bounded measurable functions with bounded support, i.e., $H \restriction_{\Gamma_0\setminus B} = 0$ for some bounded $B \in \mathcal{B}(\Gamma_0)$.

In fact, any $\mathcal{B}(\Gamma_0)$-measurable function H on Γ_0 is a sequence of functions $\big\{H^{(n)}\big\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, where $H^{(n)}$ is a $\mathcal{B}(\Gamma^{(n)})$-measurable function on $\Gamma^{(n)}$.

On Γ we consider the set of cylinder functions $\mathcal{F}_{cyl}(\Gamma)$. These functions are characterized by the relation $F(\gamma) = F \restriction_{\Gamma_\Lambda} (\gamma_\Lambda)$.

The following mapping from $L^0_{ls}(\Gamma_0)$ into $\mathcal{F}_{cyl}(\Gamma)$ plays a key role in our further considerations:

$$KH(\gamma) := \sum_{\eta\Subset\gamma} H(\eta), \quad \gamma \in \Gamma, \tag{2.5}$$

where $H \in L^0_{ls}(\Gamma_0)$. See, for example, [34] and references therein for more details. The summation in (2.5) is taken over all finite sub-configurations $\eta \in \Gamma_0$ of the (infinite) configuration $\gamma \in \Gamma$; this relationship is represented symbolically by $\eta \Subset \gamma$. The mapping K is linear, positivity preserving, and invertible, with

$$K^{-1}F(\eta) := \sum_{\xi\subset\eta} (-1)^{|\eta\setminus\xi|} F(\xi), \quad \eta \in \Gamma_0. \tag{2.6}$$

Here and in the sequel, inclusions like $\xi \subset \eta$ hold for $\xi = \emptyset$ as well as for $\xi = \eta$. We denote the restriction of K onto functions on Γ_0 by K_0.

A probability measure $\mu \in \mathcal{M}^1_{fm}(\Gamma)$ is called locally absolutely continuous with respect to (w.r.t.) a Poisson measure π if for any $\Lambda \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$ the projection of μ onto $\Gamma(\Lambda)$ is absolutely continuous w.r.t. the projection of π onto $\Gamma(\Lambda)$. By [34], there exists in this case a *correlation functional* $\varkappa_\mu : \Gamma_0 \to \mathbb{R}_+$ such that the following equality holds for any $H \in B_{bs}(\Gamma_0)$:

$$\int_\Gamma (KH)(\gamma)\, d\mu(\gamma) = \int_{\Gamma_0} H(\eta)\varkappa_\mu(\eta)\, d\lambda(\eta). \tag{2.7}$$

Restrictions $\varkappa_\mu^{(n)}$ of this functional on $\Gamma_0^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}_0$, are called *correlation functions* of the measure μ. Note that $\varkappa_\mu^{(0)} = 1$.

2.2 Microscopic Spatial Ecological Model

Let us consider the spatial ecological model a.k.a. the Bolker–Pacala model, for the introduction and detailed study of this model see [9, 16–18, 20]. Below we formulate certain results from these papers concerning the Markov dynamics and mesoscopic scaling in the Bolker–Pacala model.

The heuristic generator L in this model is defined on a space of functions over the configuration space

$$\begin{aligned}(LF)(\gamma) = &\sum_{x\in\gamma}\Big(m + \sum_{y\in\gamma\setminus x} a^-(x-y)\Big)[F(\gamma\setminus x) - F(\gamma)]\\ &+ \sum_{x\in\gamma}\int_{\mathbb{R}^d} a^+(x-y)[F(\gamma\cup y) - F(\gamma)]dy.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Here $m > 0$ is the mortality rate, a^- and a^+ are competition and dispersion kernels, respectively. See Section 5 for the conditions on these kernels in the present paper.

We assume that the initial distribution in our model is a probability measure $\mu_0 \in \mathcal{M}^1(\Gamma)$ and the corresponding sequence of correlation functions $\varkappa_0 = (\varkappa_0^{(n)})_{n=0}^\infty$, see e.g. [34]. Then the evolution of the model at time $t > 0$ is the measure $\mu_t \in \mathcal{M}^1(\Gamma)$, and $\varkappa_t = (\varkappa_t^{(n)})_{n=0}^\infty$ its correlation functions. If the evolution of states $(\mu_t)_{t\ge 0}$ is determined by the heuristic Markov generator L, then μ_t is the solution of the forward Kolmogorov equation (or Fokker–Plank equation FPE),

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mu_t}{\partial t} &= L^*\mu_t \\ \mu_t|_{t=0} &= \mu_0, \end{cases} \tag{2.9}$$

where L^* is the adjoint operator of L. In terms of the time-dependent correlation functions $(\varkappa_t)_{t\ge 0}$ corresponding to $(\mu_t)_{t\ge0}$, the FPE may be rewritten as an infinite system of evolution equations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varkappa_t^{(n)}}{\partial t} &= (L^\triangle \varkappa_t)^{(n)} \\ \varkappa_t^{(n)}|_{t=0} &= \varkappa_0^{(n)}, \qquad n \ge 0, \end{cases} \tag{2.10}$$

where $L^{\triangle}$ is the image of L^* in a space of vector-functions $\varkappa_t = (\varkappa_t^{(n)})_{n=0}^{\infty}$. The expression for the operator $L^{\triangle}$ is obtained from the operator L via combinatoric calculations (cf. [34]).

The evolution equation (2.10) is nothing but a hierarchical system of equations corresponding to the Markov generator L. This system is the analogue of the BBGKY-hierarchy of the Hamiltonian dynamics, see [8].

We are interested in the Vlasov-type scaling of stochastic dynamics which leads to the so-called kinetic description of the considered model. In the language of theoretical physics we are dealing with a mean-field type scaling which is adopted to preserve the spatial structure. In addition, this scaling will lead to the limiting hierarchy, which possesses a chaos preservation property. In other words, if the initial distribution is Poisson (non-homogeneous) then the time evolution of states will maintain this property. We refer to [16] for a general approach, other examples, and additional references.

There exists a standard procedure for deriving the Vlasov scaling from the generator in (2.10). The specific type of scaling is dictated by the model in question. The process leading from $L^{\triangle}$ to the rescaled Vlasov operator $L_V^{\triangle}$ produces a non-Markovian generator L_V since the positivity-preserving property fails. Therefore instead of (2.9) we consider the following kinetic FPE,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mu_t}{\partial t} &= L_V^* \mu_t \\ \mu_t\big|_{t=0} &= \mu_0, \end{cases} \tag{2.11}$$

and observe that if the initial distribution satisfies $\mu_0 = \pi_{\rho_0}$, then the solution is of the same type, i.e., $\mu_t = \pi_{\rho_t}$, $t > 0$.

In terms of correlation functions, the kinetic FPE (2.11) gives rise to the following Vlasov-type hierarchical chain (Vlasov hierarchy)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varkappa_t^{(n)}}{\partial t} &= (L_V^{\triangle} \varkappa_t)^{(n)} \\ \varkappa_t^{(n)}\big|_{t=0} &= \varkappa_0^{(n)}, \qquad n \geq 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

This evolution of correlations functions exists in a scale of Banach spaces, cf. [17].

Let us consider the Lebesgue–Poisson exponent, defined in (2.3)

$$\varkappa_0(\eta) = e_\lambda(\rho_0, \eta) = \prod_{x \in \eta} \rho_0(x), \quad \eta \in \Gamma_0$$

as the initial condition. Such correlation functions correspond to the Poisson measures π_{ρ_0} on Γ with the density ρ_0. The scaling $L_V^{\triangle}$ should be such that the dynamics $\varkappa_0 \mapsto \varkappa_t$ preserves this structure, or more precisely, $\varkappa_t$ should be of the same type

$$\varkappa_t(\eta) = e_\lambda(\rho_t, \eta) = \prod_{x \in \eta} \rho_t(x), \quad \eta \in \Gamma_0. \tag{2.13}$$

The relation (2.13) is known as the *chaos propagation property* of the Vlasov hierarchy. Under certain assumptions on the mortality m and the kernels $a^{\pm}$, the density ρ_t corresponding to the spatial ecologic model, the equation (2.13) implies, in general a non-linear differential equation for ρ_t, $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\frac{\partial \rho_t(x)}{\partial t} = \left(a^+ * \rho_t\right)(x) - m\rho_t(x) - \rho_t(x)\left(a^- * \rho_t\right)(x), \quad \rho_t(x)|_{t=0} = \rho_0(x), \tag{2.14}$$

where the initial condition ρ_0 is a bounded function. Equation (2.14) is called *Vlasov-type kinetic equation* for ρ_t, see [16], [18] and references therein for more details and [48] for important applications of this model in various areas of science.

In general, if one does not start with a Poisson measure, the solution will leave the space $\mathcal{M}^1(\Gamma)$. To have a bigger class of initial measures, we may consider the cone inside $\mathcal{M}^1(\Gamma)$ generated by convex combinations of Poisson measures, denoted by $\mathbb{P}(\Gamma)$.

Remark 2.1. Below we discuss the concept of a fractional Fokker–Plank equation and the related fractional statistical dynamics, which is still an evolution in the space of probability measures $\mathcal{M}^1(\Gamma)$ on the configuration space Γ. The mesoscopic scaling of this evolutions leads to a fractional kinetic FPE. The subordination principle provides the representation of the solution to this equation as a flow of measures that is a transformation of a Poisson flow for the initial kinetic FPE, see Sections 3 and 4 below.

Let $X = \{X_t,\ t \geq 0\}$ be the Markov process with generator L given in (2.8). Denote by $S = \{S_t,\ t \geq 0\}$ the subordinator, independent of X, with Laplace exponent $\mathcal{L}(p) := p\mathcal{K}(p)$, $p \geq 0$, that is

$$\mathbb{E}\left(e^{-pS_t}\right) = e^{-tp\mathcal{K}(p)}, \quad p \geq 0.$$

The inverse subordinator $E = \{E_t,\ t \geq 0\}$ (also called the first hitting time process for the subordinator S) is defined by

$$E_t := \inf\{s > 0 : S_s > t\}, \quad t \geq 0$$

and its density we denote by $\varrho_t(\tau)$, that is

$$\varrho_t(\tau)d\tau = \partial_\tau P(E_t \leq \tau) = \partial_\tau P(S_\tau \geq t) = -\partial_\tau P(S_\tau < t).$$

Then the subordination process $Y_t := X_{E_t}$, $t \geq 0$ is such that the one-dimensional distribution ν_t is given by

$$\nu_t(d\gamma) = \int_0^\infty \varrho_t(\tau)\mu_\tau(d\gamma)\,d\tau.$$

The t-Laplace transform of the density $\varrho_t(\tau)$ is equal to

$$\int_0^\infty e^{-ps}\varrho_s(\tau)\,ds = \mathcal{K}(p)e^{-\tau p\mathcal{K}(p)}.$$

Let k be the kernel defined by $\mathcal{K}$ as its Laplace transform

$$\mathcal{K}(p) = \int_0^\infty e^{-pt}k(t)\,dt.$$

With the help of the kernel k we define the general fractional derivative (GFD) developed in [29] which plays a basic role in this paper

$$(\mathbb{D}_t^{(k)} f)(t) := \frac{d}{dt}\int_0^t k(t-s)\big(f(s)-f(0)\big)\,ds,\ t>0. \tag{2.15}$$

In Subsection 2.3 we study in more details the derivative $\mathbb{D}_t^{(k)}$. The natural question about the subordination process Y is: What type of "differential" equation does the distribution ν_t of Y_t satisfies? The answer is as follows: The distribution ν_t satisfies the following GFD equation

$$(\mathbb{D}_t^{(k)}\nu_t)(t) = L\nu_t, \quad t>0.$$

As a result we shall consider the fractional Fokker–Plank equation with the GFD (2.15)

$$\begin{cases}\mathbb{D}_t^{(k)}\mu_{t,k} &= L_V^{\triangle}\mu_{t,k}\\ \mu_{t,k}|_{t=0} &= \mu_{0,k}.\end{cases}$$

The corresponding evolutions of the correlation functions for the Vlasov scaling is

$$\begin{cases}\mathbb{D}_t^{(k)}\varkappa_{t,k} &= L_V^{\triangle}\varkappa_{t,k}\\ \varkappa_{t,k}|_{t=0} &= \varkappa_{0,k}\end{cases}$$

which is a non-Markov evolution. We would like to study some properties of the evolution $\varkappa_{t,k}$. The general subordination principle gives

$$\varkappa_{t,k}(\eta) = \int_0^\infty \varrho_t(\tau)\varkappa_\tau(\eta)\,d\tau, \quad \eta\in\Gamma_0, \tag{2.16}$$

which is a relation to all orders of the correlation functions. The kernel ϱ_t and its properties are studied in Section 3 below. In particular, the density of "particles" is given by

$$\rho_t^k(x) = \varkappa_{t,k}^{(1)}(x), \quad x\in\mathbb{R}^d.$$

The general subordination principle (2.16) gives

$$\rho_t^k(x) = \int_0^\infty \varrho_t(\tau)\varkappa_\tau^{(1)}(x)\,d\tau = \int_0^\infty \varrho_t(\tau)\rho_\tau(x)\,d\tau, \quad x\in\mathbb{R}^d. \tag{2.17}$$

From this representation we should be able to derive an effect of the fractional derivative onto the evolution of the density, see Sections 4 and 5.

Remark 2.2. Certain heuristic motivations in physics are leading to the following non-linear equation with fractional time derivative:

$$\mathbb{D}_t^{(k)}\rho_t(x) = \big(a^+ * \rho_t\big)(x) - m\rho_t(x) - \rho_t(x)\big(a^- * \rho_t\big)(x). \tag{2.18}$$

Note that the subordinated density dynamics has no relation with the solution to this equation. Both evolutions will coincide only in the case of a linear operator in the right hand side.

It is reasonable to study the properties of subordinated flows in (2.17) from a more general point of view, when the evolution of densities $\rho_t(x)$ is not necessarily related to a particular Vlasov-type kinetic equation, this is realized in Sections 4 and 5 below.

2.3 General Fractional Derivative

2.3.1 Definitions

Motivated by the preceding considerations, we recall the general concept of fractional derivative developed in [29] which plays a basic role in this paper. The basic ingredient of the theory of evolution equations, [14, 26] is to consider, instead of the first time derivative, the Caputo–Djrbashian fractional derivative of order $\alpha \in (0,1)$

$$\big(\mathbb{D}_t^{(\alpha)} u\big)(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t k(t-\tau)u(\tau)\,d\tau - k(t)u(0), \quad t>0, \tag{2.19}$$

where

$$k(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},\ t>0.$$

Further details on fractional calculus may be found in [26] and references therein.

More generally, it is natural to consider differential-convolution operators

$$\big(\mathbb{D}_t^{(k)} u\big)(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t k(t-\tau)u(\tau)\,d\tau - k(t)u(0),\ t>0, \tag{2.20}$$

where $k \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ is a nonnegative kernel. As an example of such operator, we consider the distributed order derivative $\mathbb{D}_t^{(\mu)}$ corresponding to

$$k(t) = \int_0^1 \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\mu(\alpha)\,d\alpha, \quad t>0, \tag{2.21}$$

where $\mu(\alpha)$, $0 \le \alpha \le 1$ is a positive weight function on $[0,1]$, see [1, 13, 23, 24, 27, 28, 38].

Remark 2.3.
1) The Caputo–Djrbashian fractional derivative (2.19) are widely used in physics, see [37, 41, 42], for modeling slow relaxation and diffusion processes. In this case the power-like decay of the mean square displacement of a diffusive particle appears instead of the classical exponential decay.
2) Equations with the distributed order operators (2.20)-(2.21) describe ultraslow processes with logarithmic decay, see [29, 38].

Considering the general operator (2.20), it is natural to investigate the conditions on the kernel $k \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ such that the operator $\mathbb{D}_t^{(k)}$ possess a right inverse (a kind of a fractional integral) and produce, a kind of a fractional derivative, equations of evolution type. In particular, it means that

(A) The Cauchy problem

$$\big(\mathbb{D}_t^{(k)} u_\lambda\big)(t) = -\lambda u_\lambda(t), \quad t>0; \quad u(0)=1, \tag{2.22}$$

where $\lambda > 0$, has a unique solution u_λ, infinitely differentiable for $t>0$ and completely monotone, $u_\lambda \in \mathcal{CM}$, see Appendix A for this and other classes of functions in what follows.

(B) The Cauchy problem

$$(\mathbb{D}_t^{(k)} w)(t,x) = \Delta w(t,x), \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d; \quad w(0,x)=w_0(x), \tag{2.23}$$

where w_0 is a bounded globally Hölder continuous function, that is $|w_0(x)-w_0(y)| \le C|x-y|^\theta$, $0<\theta\le 1$, for any $x,y\in\mathbb{R}^d$, has a unique bounded solution. In addition, the equation (2.23) possesses a fundamental solution of the Cauchy problem, a kernel which is a probability density.

Remark 2.4. 1) Gripenberg [22] has established the well-posedness of the Cauchy problem for equations with the operator $\mathbb{D}_t^{(k)}$ under much weaker assumptions than those in (A) and (B).

2) When $\mathbb{D}_t^{(k)}$ is the Caputo–Djrbashian fractional derivative $\mathbb{D}_t^{(\alpha)}$, $0<\alpha<1$, then $u_\lambda(t)=E_\alpha(-\lambda t^\alpha)$ where E_α is the Mittag–Leffler function

$$E_\alpha(z)=\sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+1)}.$$

3) The asymptotic properties of E_α for real arguments are given by, see for example [21].

$$E_\alpha(z) \sim \frac{1}{\alpha} e^{z^{1/\alpha}}, \quad \text{as } z\to\infty$$

which resembles the classical case $\alpha=1$, $E_1(z)=e^z$. On the other hand

$$E_\alpha(z) \sim -\frac{z^{-1}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad \text{as } z\to-\infty, \tag{2.24}$$

so that $u_\lambda(t)\sim Ct^{-\alpha}$, $t\to-\infty$. Here and below C denotes a positive constant which changes from line to line. This slow decay property is at the origin of a large variety of applications of fractional differential equations.

4) In the distributed order case, where k is given by (2.20)-(2.21) with $\mu(0)\neq 0$, we have a logarithmic decay, see [28]

$$u_\lambda(t) \sim C(\log t)^{-1}, \quad \text{as } t\to\infty.$$

A more general choice of the weight function μ leads to other type of decay patterns.

The conditions upon k guaranteeing a solution to (A) and (B) were given in [29]. The sufficient conditions are as follows.

(H) The Laplace transform

$$\mathcal{K}(p) := (\mathscr{L}k)(p) := \int_0^\infty e^{-pt}k(t)\,dt \tag{2.25}$$

exists and $\mathcal{K}$ belongs to the Stieltjes class $\mathcal{S}$ (or equivalently, the function $\mathcal{L}(p):=p\mathcal{K}(p)$ belongs to the complete Bernstein function class $\mathcal{CBF}$), and

$$\mathcal{K}(p)\to\infty,\ \text{as } p\to 0; \quad \mathcal{K}(p)\to 0,\ \text{as } p\to\infty; \tag{2.26}$$

$$\mathcal{L}(p)\to 0,\ \text{as } p\to 0; \quad \mathcal{L}(p)\to\infty,\ \text{as } p\to\infty. \tag{2.27}$$

Under the hypotheses (H), $\mathcal{L}(p)$ and its analytic continuation admit an integral representation, cf. (A.6) in Appendix A below (see also [49])

$$\mathcal{L}(p) = \int_{(0,\infty)} \frac{p}{p+t}\, d\sigma(t) \tag{2.28}$$

where σ is a Borel measure on $[0,\infty)$, such that $\int_{(0,\infty)} (1+t)^{-1}\, d\sigma(t) < \infty$.

2.3.2 Asymptotic Properties

As the kernel k and its Laplace transform $\mathcal{K}$ are among the objects which play a major role in what follows, here we collect some of its asymptotic properties which depends on the kind of fractional derivative considered. Two cases are studied, the distributed order derivative with k given by (2.21) and the general fractional derivative (2.20) for which $\mathcal{K}$ is a Stieltjes function.

Distributed order derivatives. The following two propositions refers to the special case of distributed order derivative, we refer to [28] for the details and proofs.

Proposition 2.5 (cf. [28, Prop. 2.1]). *If $\mu \in C^3([0,1])$ and $\mu(1) \neq 0$, then*

$$k(s) \sim \frac{1}{s}\frac{1}{(\log s)^2}\mu(1), \quad \text{as } s \to 0, \tag{2.29}$$

$$k'(s) \sim -\frac{1}{s^2}\frac{1}{(\log s)^2}\mu(1), \quad \text{as } s \to 0. \tag{2.30}$$

Notice that (2.29) implies that $k \in L^1([0,T])$, however $k \notin L^q([0,T])$ for any $q > 1$.

We denote the negative real axis by $\mathbb{R}_- := \{r \in \mathbb{R},\ r \leq 0\}$.

Proposition 2.6 (cf. [28, Prop. 2.2]). *1) Let $\mu \in C^2([0,1])$ be given. If $p \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ with $|p| \to \infty$, then*

$$\mathcal{K}(p) = \frac{\mu(1)}{\log p} + O\left((\log|p|)^{-2}\right). \tag{2.31}$$

More precisely, if $\mu \in C^3([0,1])$, then

$$\mathcal{K}(p) = \frac{\mu(1)}{\log p} - \frac{\mu'(1)}{(\log p)^2} + O\left((\log|p|)^{-3}\right).$$

2) Let $\mu \in C([0,1])$ and $\mu(0) \neq 0$ be given. If $p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, then

$$\mathcal{K}(p) \sim \frac{1}{p}\left(\log\frac{1}{p}\right)^{-1}\mu(0), \quad \text{as } p \to 0. \tag{2.32}$$

3) Let $\mu \in C([0,1])$ be such that $\mu(\alpha) \sim a\alpha^\lambda$, $a > 0$, $\lambda > 0$. If $p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, then

$$\mathcal{K}(p) \sim a\Gamma(1+\lambda)\frac{1}{p}\left(\log\frac{1}{p}\right)^{-1-\lambda}, \quad \text{as } p \to 0.$$

Classes of Stieltjes functions. Now we turn our attention to the general fractional derivative (2.20). Thus, under the assumption (H), the Stieltjes function $\mathcal{K}$ admits the following integral representation [29]

$$\mathcal{K}(p) = \int_{(0,\infty)} \frac{1}{p+t}\, d\sigma(t), \quad p > 0, \tag{2.33}$$

where σ is a Borel measure on $\mathbb{R}_+ := [0,\infty)$ such that $\int_{(0,\infty)}(1+t)^{-1}\, d\sigma(t) < \infty$, see also Definition A.4. In other words, $\mathcal{K}$ is the Stieltjes transform of the Borel measure σ. In addition we assume that $\sigma \in \mathcal{M}_{\mathrm{abs}}(\mathbb{R}_+)$, that is σ is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure with a continuous density φ on $[0,\infty)$ such that (2.33) turns out

$$\mathcal{K}(p) = \int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{p+t}\, dt, \tag{2.34}$$

such that

$$\varphi(t) \sim Ct^{-\alpha}, \quad \text{as } t \to \infty,\ 0 < \alpha < 1, \tag{2.35}$$

$$\varphi(t) \sim Ct^{\theta-1}, \quad \text{as } t \to 0,\ 0 < \theta < 1. \tag{2.36}$$

Then, if $\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty))$ it follows from [51, Thm. 1, page 299] (see also [36]) that the asymptotic (2.35) implies the asymptotic for $\mathcal{K}$

$$\mathcal{K}(p) \sim Cp^{-\alpha}, \quad \text{as } p \to \infty. \tag{2.37}$$

For the asymptotic of $\mathcal{K}$ at the origin, we have the following lemma, a special case of a result from [45, page 326] given there without a proof.

Lemma 2.7. *Suppose that*

$$\varphi(t) = Ct^{\theta-1} + \psi(t), \quad 0 < \theta < 1, \tag{2.38}$$

where $|\psi(t)| \le Ct^{\theta-1+\delta}$, $0 < t \le t_0$, *and* $|\psi(t)| \le Ct^{-\varepsilon}$, $t > t_0$. *Here* $0 < \delta < 1-\theta$ *and* $\varepsilon > 0$. *Then*

$$\mathcal{K}(p) \sim Cp^{\theta-1}, \quad \text{as } p \to 0.$$

Proof. It follows from (2.34) and (2.38) that $\mathcal{K}$ is equal to $\mathcal{K}(p) = s_0(p) + s_1(p)$ where

$$s_0(p) = C\int_0^\infty \frac{t^{\theta-1}}{t+p}\, dt, \tag{2.39}$$

$$s_1(p) = C\int_0^{t_0} \frac{\psi(t)}{t+p}\, dt. \tag{2.40}$$

The integral in (2.39) may be evaluated making the change of variables $t = p\tau$ and we find that $s_0(p) = Cp^{\theta-1}$ (with a different constant C independent of p). On the other hand, $s_1(p)$ is estimated by

$$|s_1(p)| \le C\int_0^{t_0} \frac{t^{\theta-1+\delta}}{t+p}\, dt + C\int_{t_0}^\infty \frac{t^{-\varepsilon}}{t+p}\, dt \le Cp^{\theta-1+\delta} + C,$$

Putting together, the required asymptotic follows. □

3 Solutions of the Evolution Equations

Let L be a heuristic Markov generator defined on functions $u(t,x)$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$. We have in mind the Bolker–Pacala model and the related non-linear equation, see Subsection 2.2 for details. Consider the evolution equations of the following type

$$\frac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} = (Lu_1)(t,x), \tag{3.1}$$

$$(\mathbb{D}_t^{(k)} u_{(k)})(t,x) = (Lu_{(k)})(t,x), \tag{3.2}$$

with the same operator L acting in the spatial variables x with the same initial conditions

$$u_1(0,x)=\xi(x), \quad u_{(k)}(0,x)=\xi(x).$$

The solutions of equations (3.1) and (3.2) typically satisfy the subordination principle [2], that is there exists a nonnegative density kernel function $\varrho_t(s)$, $s,t>0$, such that $\int_0^\infty \varrho_t(s)\,ds=1$ and

$$u_{(k)}(t,x)=\int_0^\infty \varrho_t(s)u_1(s,x)\,ds. \tag{3.3}$$

The appropriate notions of the solutions of (3.1) and (3.2) depend on the specific setting, they were explained

- in [29] for the case where L is the Laplace operator on $\mathbb{R}^n$,
- in [2–4] with abstract semigroup generators for special classes of kernels k,
- in [44] for abstract Volterra equations.

There is also a probabilistic interpretation of the subordination identities (see, for example, [32, 46]). In the models of statistical dynamics we deal with a subordination of measure flows that will give a weak solution to the corresponding fractional equation.

In the above relation (3.3), the subordination kernel $\varrho_t(s)$ does not depend on L and can be found as follows [29]. Consider the function

$$g(s,p):=\mathcal{K}(p)e^{-s\mathcal{L}(p)}, \quad s>0,\ p>0. \tag{3.4}$$

The function $p\mapsto e^{-s\mathcal{L}(p)}$ is the composition of a complete Bernstein and a completely monotone function, then by Theorem A.7-2 it is a completely monotone function. By Bernstein's theorem (cf. Theorem A.2), for each $s\geq 0$, there exists a probability measure μ_s on $\mathbb{R}_+$ such that

$$e^{-s\mathcal{L}(p)}=\int_0^\infty e^{-p\tau}\,d\mu_s(\tau). \tag{3.5}$$

The family of measures $\{\mu_s,\ s>0\}$ is weakly continuous in s. Define

$$\varrho_t(s):=\int_0^t k(t-\tau)\,d\mu_s(\tau). \tag{3.6}$$

It follows from (2.25) and (3.5) that the t-Laplace transform of $\varrho_t(s)$ is equal to $g(s,p)$:

$$g(s,p) = \int_0^\infty e^{-pt} \varrho_t(s)\, dt. \tag{3.7}$$

It is easy to see from (3.4) that

$$\int_0^\infty g(s,p)\, ds = \frac{1}{p}$$

such that (3.7) may be written as

$$\int_0^\infty e^{-pt}\, dt \int_0^\infty \varrho_t(s)\, ds = \frac{1}{p}$$

which implies the equality

$$\int_0^\infty \varrho_t(s)\, ds = 1.$$

Example 3.1 (α-stable subordinator)**.** Let S be a α-stable subordinator, $\alpha \in (0,1)$ with Laplace exponent $\mathcal{L}(p) = p^\alpha$ and the corresponding Lévy measure

$$d\sigma(s) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} s^{-(\alpha+1)}\, ds.$$

In this case $\mathcal{K}(p) = p^{\alpha-1}$ and the kernel k is given by

$$k(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

The associated general fractional derivative $\mathbb{D}_t^{(k)}$ in (2.20) coincides with the Caputo–Djrbashian fractional derivatives $\mathbb{D}_t^{(\alpha)}$, see (2.19). As for the density $\varrho_t(\tau)$, it follows from Corollary 3.1 in [40] that

$$\varrho_t(\tau) = \frac{t}{\alpha} \tau^{-1-1/\alpha} g_\alpha(t\tau^{-1/\alpha}),$$

where g_α is the density function of S_1, that is its Laplace transform is given by

$$\tilde{g}_\alpha(p) = e^{-p^\alpha}.$$

In addition, it was shown in Proposition 1(a) in [5], see also Theorem 4.3 in [10], that E_t has a Mittag–Leffler distribution, that is

$$\tilde{\varrho}_t(p) = \mathbb{E}(e^{-pE_t}) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-pt^\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha+1)} = E_\alpha(-pt^\alpha). \tag{3.8}$$

It follows from the asymptotic of the Mittag–Leffler function E_α in (2.24) that

$$\tilde{\varrho}_t(p) \sim \frac{C}{t^\alpha}, \text{ as } t \to \infty.$$

4 Subordination of Moving Step Function

Let $u_0(t,x)$ be a solution to the kinetic evolution equation, say for the Bolker–Pacala model from Subsection 2.2. The subordinated dynamics is given by

$$u(t,x) = \int_0^\infty \varrho_t(\tau) u_0(\tau,x)\, d\tau. \tag{4.1}$$

As a simple example we take a traveling step function (this is a toy example of a traveling wave in fact) $u_0(t,x) = 1_{(-\infty,0]}(x-tv)$, where $x \in \mathbb{R}$, $t, v \in \mathbb{R}_+$ and consider the subordination of the moving step function. In this case

$$u(t,x) = \int_0^\infty \varrho_t(\tau) u_0(\tau,x)\, d\tau = \int_{x/v}^\infty \varrho_t(\tau)\, d\tau.$$

We are interested in studying this dynamics, one possibility is to study the *Cesaro limit*

$$M_t(u) = \frac{1}{t}\int_0^t u(\tau,x)\, d\tau, \text{ as } t \to \infty. \tag{4.2}$$

The Cesaro limit (4.2) may be realized in a number of particular cases related to the fractional derivative considered. Below we investigate three cases corresponding to the α-stable subordinator, the distributed order derivative and general fractional derivative with $\mathcal{K}$ fulfilling (H).

Remark 4.1. The Cesaro limit of the initial step function $u_0(\cdot,x)$, for fixed x, is given by

$$M_t(u_0) = \frac{1}{t}\int_0^t u_0(\tau,x)\, d\tau = \frac{1}{t}\left(t - \left(0 \vee \frac{x}{v}\right)\right) \longrightarrow 1,\ t \to \infty.$$

In addition, for the moving $x(t) = ct^\beta$ with $\beta < 1$ we obtain the same asymptotic. Note that the assumption $\beta < 1$ is needed to ensure that $x(t)/t \longrightarrow 0$ as $t \to \infty$.

In order to study the Cesaro limit $M_t(u)$ in (4.2), at first we compute the Laplace transform of $u(t,x)$ in t

$$\tilde{u}(p,x) := \int_0^\infty e^{-pt} u(t,x)\, dt = \int_0^\infty e^{-pt} \int_{x/v}^\infty \varrho_t(s)\, ds\, dt$$

using Fubini's theorem and the equality (3.7) yields

$$\tilde{u}(p,x) = \int_{x/v}^\infty g(s,p)\, ds = \int_{x/v}^\infty \mathcal{K}(p) e^{-sp\mathcal{K}(p)}\, ds = \frac{1}{p} e^{-\frac{x}{v}p\mathcal{K}(p)}.$$

The following three cases are distinguished.

1) α-stable subordinator. It follows from Example 3.1 that $\mathcal{K}(p) = p^{\alpha-1}$ which, for fixed $x \in \mathbb{R}$, implies

$$\tilde{u}(p,x) = \frac{1}{p} e^{-\frac{x}{v}p^\alpha} = \frac{1}{p} L\left(\frac{1}{p}\right),\ \text{as } p \to 0,$$

where $L(x)$, $x > 0$ is a slowly varying function, that is

$$\lim_{x\to\infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1, \text{ as } x \to \infty,$$

see also Definition B.1-2. It follows from Karamata Tauberian theorem (cf. Theorem B.3-(i) with $\rho = 1$) that

$$\int_0^t u(\tau, x)\, d\tau \sim tL(t), \text{ as } t \to \infty$$

and this implies that the Cesaro limit

$$M_t(u) = \frac{1}{t}\int_0^t u(\tau, x)\, d\tau \longrightarrow 1, \text{ as } t \to \infty.$$

The same results holds if ,instead of a fixed $x \in \mathbb{R}$ we take the moving $x(t) = ct^\beta$ with $0 < \beta < \alpha < 1$.

2) The distributed order derivative. It follows from the asymptotic at the origin in (2.32) that

$$\tilde{u}(p, x) \sim \frac{1}{p} e^{-\frac{x}{v}\left(\log\frac{1}{p}\right)^{-1}} =: \frac{1}{p} L\left(\frac{1}{p}\right), \text{ as } p \to 0,$$

where $L(p) = e^{-\frac{x}{v}\left(\log\frac{1}{p}\right)^{-1}}$, $p \geq 0$ is a slowly varying function. Then an application of the Karamata Tauberian theorem (cf. Theorem B.3-(i) with $\rho = 1$) yields

$$\int_0^t u(\tau, x)\, d\tau \sim te^{-\frac{x}{v}(\log t)^{-1}}, \text{ as } t \to \infty$$

which implies the Cesaro limit $M_t(u) \longrightarrow 1$ as $t \to \infty$, for any fixed $x \geq 0$. For the moving $x(t) = ct^\beta$, for any $\beta > 0$, we obtain

$$M_t u(\cdot, x(t)) \longrightarrow 0, \; t \to \infty.$$

Note that the motion of the point x in time with any positive power turns the Cesaro limit to vanish.

3) General fractional derivative. If the measure σ in (2.33) is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure and the density φ satisfies (2.36), then Lemma 2.7 implies that $\mathcal{K}(p) \sim Cp^{\theta-1}$, as $p \to 0$ and

$$\tilde{u}(p, x) \sim \frac{1}{p} e^{-\frac{x}{v}Cp^\theta} = \frac{1}{p} L\left(\frac{1}{p}\right), \text{ as } p \to 0,$$

and $L(x)$, $x > 0$ is a slowly varying function. Once again by Karamata's Tauberian theorem (cf. Theorem B.3-(i) with $\rho = 1$) we obtain the asymptotic for $M_t(u)$, namely

$$M_t(u) \sim e^{-\frac{x}{v}Ct^{-\theta}}, \text{ as } t \to \infty$$

and again we have $M_t(u) \longrightarrow 1$ as $t \to \infty$. For the moving $x(t) = ct^\beta$ for any $\beta > \theta$, we obtain

$$M_t u(\cdot, x(t)) \sim e^{-Ct^{\beta-\theta}} \longrightarrow 0,\ t \to \infty.$$

The motion of the point x in time with a positive power β such that $\beta > \theta$ turns the Cesaro limit to vanish.

5 Traveling Waves

Now we would like to consider a realistic dynamics $u_0(t,x)$ which is presented by a traveling wave for the non-local spatial logistic equation. This evolution equation appeared as the kinetic equation in the Bolker–Pacala ecological model, see Subsection 2.2 and [9, 15–18, 20] for more details.

To avoid certain technical details, we will assume the following concrete relations between the mortality m, competition a^- and dispersion a^+ kernels on the generator L (2.8), see [19] for more details.

(A) The kernels $a^\pm \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$ are probability densities, that is

$$\int_{\mathbb{R}^d} a^\pm(y)\, dy = 1.$$

The mortality $0 < m < 1$.

Remark 5.1. Under the assumption (A) equation (2.14) has two constants stationary solutions $\rho_t \equiv 0$ and $\rho_t \equiv 1$.

A traveling wave $u(t,x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ with velocity $v > 0$ is defined by a profile function $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$, that is a continuous monotonically decreasing function such that

$$\lim_{x\to-\infty} \psi(x) = 1,$$
$$\lim_{x\to\infty} \psi(x) = 0,$$

and $u(t,x) = \psi(x - vt)$, $t \geq 0$ for almost all $x \in \mathbb{R}$. For each $\delta > 0$ introduce $x_\delta \in \mathbb{R}$ as

$$\forall x > x_\delta,\ \ \psi(x) < \delta \quad \text{and} \quad \forall x < -x_\delta,\ \ \psi(x) > 1 - \delta.$$

For a fixed $x \in \mathbb{R}$ the traveling wave $u_0(t,x) = \psi(x - vt)$ as a function of t is monotonically increasing and has the following properties:

$$\psi(x - vt) < \delta, \quad \forall t < \frac{x - x_\delta}{v}, \tag{5.1}$$

$$\psi(x - vt) > 1 - \delta, \quad \forall t > \frac{x + x_\delta}{v}, \tag{5.2}$$

$$\psi(x - vt) \in (0,1), \quad \forall t \in \left]\frac{x - x_\delta}{v}, \frac{x + x_\delta}{v}\right[. \tag{5.3}$$

As a characteristic of this dynamics, we again consider the Cesaro limit

$$M_t(u_0) = \frac{1}{t}\int_0^t u_0(\tau, x)\, d\tau,\ \text{as}\ t \to \infty.$$

It follows from (5.1)-5.3 the following upper bound for $M_t(u_0)$

$$M_t(u_0) = \frac{1}{t}\int_0^t \psi(x - v\tau)\, d\tau \leq \frac{1}{t}\left(\delta\frac{x - x_\delta}{v} + \frac{2x_\delta}{v} + t - \frac{x + x_\delta}{v}\right).$$

On the other hand, a bound from below of $M_t(u_0)$ is obtained by

$$M_t(u_0) \geq \frac{1}{t}\left[\frac{2x_\delta}{v} + (1-\delta)\left(t - \frac{x + x_\delta}{v}\right)\right].$$

Putting together, we have

$$1 - \delta \leq \lim_{t\to\infty} M_t(u) \leq 1,$$

due to arbitrary $\delta > 0$, the Cesaro limit

$$\lim_{t\to\infty} M_t(u) = 1.$$

Remark 5.2. Note that for the moving $x(t) = ct^\beta$, $0 < \beta < 1$ the asymptotic for $M_t(u_0)$ will be the same.

Now we will consider the subordinated dynamics

$$u(t,x) = \int_0^\infty \varrho_t(\tau) u_0(\tau, x) d\tau \tag{5.4}$$

and study the Cesaro limit

$$M_t(u) = \frac{1}{t}\int_0^t u(\tau, x)\, d\tau, \text{ as } t \to \infty. \tag{5.5}$$

To this end, at first we rewrite $u(t,x)$ as the sum of three terms. Denoting

$$\zeta_- := \frac{x - x_\delta}{v}, \qquad \zeta_+ := \frac{x + x_\delta}{v}$$

we have

$$\begin{aligned} u(t,x) = &\int_0^{\zeta_-} \varrho_t(\tau) u_0(\tau,x)\, d\tau + \int_{\zeta_-}^{\zeta_+} \varrho_t(\tau) u_0(\tau,x)\, d\tau + \int_{\zeta_+}^\infty \varrho_t(\tau) u_0(\tau,x)\, d\tau \\ =: &\, I_1(t,x) + I_2(t,x) + I_3(t,x). \end{aligned} \tag{5.6}$$

We study each term separately.

$I_1(t,x)$: It follows from (5.1) that

$$0 \leq I_1(t,x) \leq \delta \int_0^{\zeta_-} \varrho_t(\tau)\, d\tau = \delta\left(1 - \int_{\zeta_-}^\infty \varrho_t(\tau)\, d\tau\right).$$

Therefore, we have

$$0 \leq \frac{1}{t}\int_0^t I_1(s,x)\, ds \leq \delta - \frac{\delta}{t}\int_0^t \int_{\zeta_-}^\infty \varrho_t(\tau)\, d\tau\, ds.$$

The asymptotic for the integral on the rhs follows as in Section 4 (with ζ_- instead of $\frac{x}{v}$) for all three cases of α-stable subordinator (corresponding to Caputo–Djrbashian fractional derivatives) distributed order derivative, general fractional derivative, we have

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \int_{\zeta_-}^{\infty} \varrho_s(\tau)\, d\tau\, ds = 1$$

which implies

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_1(s,x)\, ds = 0.$$

$I_2(t,x):$ In order to study the behavior in t of

$$\frac{1}{t} \int_0^t I_2(s,x)\, ds \le \frac{1}{t} \int_0^t \int_{\zeta_-}^{\zeta_+} \varrho_s(\tau)\, d\tau\, ds, \text{ as } t \to \infty$$

let us at first define

$$f(s) := \int_{\zeta_-}^{\zeta_+} \varrho_s(\tau)\, d\tau.$$

The Laplace transform of f is equal to

$$\begin{aligned}\tilde{f}(p) &= \int_0^\infty e^{-ps} f(s)\, ds = \int_0^\infty e^{-ps} \int_{\zeta_-}^{\zeta_+} \varrho_s(\tau)\, d\tau\, ds \\ &= \int_{\zeta_-}^{\zeta_+} g(\tau,p)\, d\tau = g_1(p) - g_2(p),\end{aligned}$$

where

$$g_1(p) = \frac{1}{p} e^{-\zeta_+ p\mathcal{K}(p)}, \qquad g_2(p) = \frac{1}{p} e^{-\zeta_- p\mathcal{K}(p)}.$$

In all the three cases of fractional derivative we have considered (e.g., for the general fractional derivative we use our hypothesis (2.27)) we have $p\mathcal{K}(p) \to 0$ as $p \to 0$, therefore $e^{-\zeta_+ p\mathcal{K}(p)} \to 1$ and $e^{-\zeta_- p\mathcal{K}(p)} \to 1$ as $p \to 0$. An application of Karamata's Tauberian theorem, see Theorem B.3, yields

$$\frac{1}{t} \int_0^t f(\tau)\, d\tau \sim \exp\left(-\frac{1}{t}\zeta_+ \mathcal{K}\left(\frac{1}{t}\right)\right) - \exp\left(-\frac{1}{t}\zeta_- \mathcal{K}\left(\frac{1}{t}\right)\right), \text{ as } t \to \infty.$$

Therefore, for the term $I_2(t,x)$, we have

$$0 \le \frac{1}{t} \int_0^t I_2(s,x)\, ds \le \frac{1}{t} \int_0^t f(s)\, ds \longrightarrow 0, \text{ as } t \to \infty$$

which implies

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_2(s,x)\, ds = 0.$$

$I_3(t,x):$ Finally we investigate the Cesaro limit of $I_3(t,x)$, that is

$$\frac{1}{t} \int_0^t I_3(\tau,x)\, d\tau, \text{ as } t \to \infty.$$

It follows from (5.2) the estimates

$$(1-\delta)\frac{1}{t}\int_0^t\int_{\zeta_+}^\infty \varrho_\tau(s)\,ds\,d\tau \le \frac{1}{t}\int_0^t I_3(\tau,x)\,d\tau \le \frac{1}{t}\int_0^t\int_{\zeta_+}^\infty \varrho_\tau(s)\,ds\,d\tau.$$

The integral

$$\int_{\zeta_+}^\infty \varrho_\tau(s)\,ds$$

was studied in Section 4 with $\zeta_+ = {}^x\!/_v$ and its Cesaro limit, for all the three types of fractional derivatives considered in Subsection 2.3, was shown to be

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\int_{\zeta_+}^\infty \varrho_\tau(s)\,ds\,d\tau = 1.$$

Hence, we have

$$1-\delta \le \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t I_3(\tau,x)\,d\tau \le 1.$$

From the arbitrary of $\delta > 0$ we obtain

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t I_3(\tau,x)\,d\tau = 1.$$

Putting all together, the Cesaro limit for the subordinated dynamics by the density $\varrho_t(\tau)$ gives

$$\lim_{t\to\infty} M_t(u) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t u(\tau,x)\,d\tau = 1.$$

This result is true for the three type of fractional derivatives considered in Subsection 2.3.

A Bernstein, Complete Bernstein and Stieltjes Functions

In this appendix we collect certain notions of functions theory needed throughout the paper. Namely, the classes of completely monotone, Stieltjes, Bernstein functions and complete Bernstein functions. They are used in connection with the properties of the Laplace transform (LT). More details on these classes may be found in [49].

Completely monotone functions. The LT (one-sided) of a function $f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ or a measure μ on $\mathcal{B}([0,\infty))$ is defined by

$$\tilde{f}(p) := (\mathscr{L}f)(p) := \int_0^\infty e^{-p\tau} f(\tau)\,d\tau \quad \text{or} \quad (\mathscr{L}\mu)(p) := \int_{[0,\infty)} e^{-p\tau}\,d\mu(\tau),$$

respectively, whenever these integrals converge. It is clear that $\mathscr{L}u = \mathscr{L}\mu_u$ if $d\mu_u(\tau) = u(\tau)\,d\tau$. Finite measures on $[0,\infty)$ are uniquely determined by their LT.

Definition A.1. A C^∞-function $\varphi : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ is called completely monotone if

$$(-1)^n \varphi^{(n)}(\tau) \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \tau > 0.$$

The family of all completely monotone functions will be denoted by $\mathcal{CM}$.

The function $[0,\infty) \ni \tau \mapsto e^{-\tau t}$, $0 \leq t < \infty$ is a prime example of a completely monotone function. In fact, any element $\varphi \in \mathcal{CM}$ can be written as an integral mixture of this family. This is precisely the contents of the next theorem, due to Bernstein, on the characterization of the class $\mathcal{CM}$ in terms the LT of positive measures supported on $[0,\infty)$. For the proof we refer to [49, Thm. 1.4].

Theorem A.2 (Bernstein)**.** *Let $\varphi : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ be a completely monotone function.*

1) Then there exists a unique measure μ on $[0,\infty)$ such that

$$\tilde{\varphi}(p) = \int_{[0,\infty)} e^{-p\tau} \, d\mu(\tau), \quad p > 0.$$

2) Conversely, whenever $\tilde{\varphi}(p) < \infty$, $\forall p > 0$, the function $[0,\infty) \ni p \mapsto \tilde{\varphi}(p)$ is completely monotone, that is φ belongs to the class $\mathcal{CM}$.

Remark A.3. The class $\mathcal{CM}$ of completely monotone functions is easily seen to be closed under pointwise addition, multiplication and convergence. However, the composition of elements of the class $\mathcal{CM}$ is, in general, not completely monotone.

Stieltjes functions. A subclass of the completely monotone functions is the, so called Stieltjes functions, and they play a central role in the study of complete Bernstein functions, defined below.

Definition A.4. A non-negative function $\varphi : (0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ is a Stieltjes function if it can be written in the form

$$\varphi(\tau) = \frac{a}{\tau} + b + \int_{(0,\infty)} \frac{1}{\tau + t} \, d\sigma(t), \tag{A.1}$$

where $a, b \geq 0$ and σ is a Borel measure on $(0,\infty)$ such that

$$\int_{(0,\infty)} (1+t)^{-1} \, d\sigma(t) < \infty. \tag{A.2}$$

The family of all Stieltjes functions we denote by $\mathcal{S}$.

Remark A.5. 1) The integral in (A.1) is called the Stieltjes transform of the measure σ.

2) Using the elementary identity

$$(\tau + t)^{-1} = \int_0^\infty e^{-s(\tau+t)} \, ds$$

and the Fubini theorem we see that the integral appearing in (A.1) is also a double Laplace transform and φ may be written as

$$\varphi(\tau) = \frac{a}{\tau} + b + \int_0^\infty e^{-\tau s} h(s)\, ds,$$

where

$$h(s) = \int_{(0,\infty)} e^{-st}\, d\sigma(t)$$

is a completely monotone function whose LT $\tilde{h}(p)$ exists for any $p > 0$. In particular, we see that $\mathcal{S} \subset \mathcal{CM}$ and $\mathcal{S}$ consists of all $\varphi \in \mathcal{CM}$ such that its representation measure (from Theorem A.2) has a completely monotone density on $(0, \infty)$, for $\varphi \in \mathcal{S}$ is of the form

$$\varphi(p) = (\mathscr{L}a \cdot dt)(p) + \big(\mathscr{L}b \cdot \delta_0(dt)\big)(p) + \big(\mathscr{L}(\mathscr{L}\sigma)(t)dt\big)(p).$$

Example A.1. The following are examples of Stieltjes functions, $\tau, t > 0$

$$\varphi_1(\tau) = 1, \quad \varphi_2(\tau) = \frac{1}{\tau}, \quad \varphi_3(\tau) = (\tau + t)^{-1}, \quad \varphi_4(\tau) = \frac{1+t}{\tau+t},$$

$$\varphi_5(\tau) = \tau^{\alpha-1}, \quad \varphi_6(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \arctan\frac{1}{\sqrt{\tau}}, \quad \varphi_7(\tau) = \frac{1}{\tau}\log(1+\tau).$$

Bernstein functions. Now we introduce the class of Bernstein functions which are closely related to completely monotone function. Bernstein functions are also known in probabilistic terms as Laplace exponents.

Definition A.6. 1) A C^∞-function $\varphi : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ is called a Bernstein function if $\varphi(\tau) \geq 0$ for all $\tau > 0$ and

$$(-1)^{n-1}\varphi^{(n)}(\tau) \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \tau > 0.$$

2) Equivalently, a function $\varphi : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ is a Bernstein function, if, and only if, it admits the representation

$$\varphi(\tau) = a + b\tau + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-\tau t})d\mu(t), \tag{A.3}$$

where $a, b \geq 0$ and μ is a Borel measure on $(0, \infty)$, called the Lévy measure, satisfying

$$\int_{(0,\infty)} (1 \wedge t)\, d\mu(t) < \infty. \tag{A.4}$$

The Lévy triplet (a, b, μ) determines φ uniquely and vice versa. In particular,

$$a = \varphi(0+), \qquad b = \lim_{\tau\to\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau}.$$

3) The class of Bernstein function will be denoted by $\mathcal{BF}$.

The following structural characterization theorem of Bernstein functions is due to Bochner, see [49, Thm 3.7] for the proof.

Theorem A.7. *Let $\varphi : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ be a positive function. The following assertions are equivalent.*

1) $\varphi \in \mathcal{BF}$.

2) $f \circ \varphi \in \mathcal{CM}$, *for every* $f \in \mathcal{CM}$.

3) $e^{-\tau\varphi} \in \mathcal{CM}$ *for every* $\tau > 0$.

Example A.2. The following are Bernstein functions

$$\varphi_1(\tau) = \tau^\alpha,\ 0 < \alpha < 1, \quad \text{or} \quad \varphi_2(\tau) = \frac{\tau}{1+\tau}, \quad \text{or} \quad \varphi_3(\tau) = \log(1+\tau)$$

which are obtained as an integral mixture of the extremal Bernstein functions

$$e_0(\tau) = \tau, \qquad e_t(\tau) = \frac{1+t}{t}(1 - e^{-\tau t}),\ 0 < t < \infty, \quad \text{and} \quad e_\infty(\tau) = 1$$

by the measures $d\mu(t) = \dfrac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $d\mu(t) = e^{-t}$ and $d\mu(t) = t^{-1}e^{-t}$, respectively.

Complete Bernstein functions. Finally, we introduce the fourth class of functions, so called complete Bernstein functions, which are Bernstein functions where the Lévy measure μ in the representation (A.3) has a nice density.

Definition A.8. A Bernstein function φ is said to be a complete Bernstein function if its Lévy measure μ in (A.3) has a density ρ with respect to the Lebesgue measure with $\rho \in \mathcal{CM}$. Thus, (A.3) takes the form

$$\varphi(\tau) = a + b\tau + \int_0^\infty (1 - e^{-\tau t})\rho(t)\, dt, \tag{A.5}$$

such that by (A.4) we have

$$\int_0^\infty (1 \wedge t)\rho(t)\, dt < \infty.$$

The class of complete Bernstein functions we denote by $\mathcal{CBF}$.

The following theorem gives the characterization of complete Bernstein functions, cf. [49, Thm 6.2]

Theorem A.9. *Let $\varphi : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ be a given non-negative function, then the following expression are equivalent.*

1) $\varphi \in \mathcal{CBF}$.

2) The function $(0,\infty) \ni \tau \mapsto \tau^{-1}\varphi(\tau)$ *belongs to* $\mathcal{S}$.

3) There exists a Bernstein function ψ *such that*

$$\varphi(\tau) = \tau^2(\mathscr{L}\psi)(\tau), \quad \tau > 0.$$

4) φ *has an analytic continuation to the upper plane* $\mathbb{C}_{>0} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \Im z > 0\}$ *such that* $\Im\varphi(z) \geq 0$ *for all* $z \in \mathbb{C}_{>0}$ *and the limit* $\varphi(0+) = \lim_{\tau\downarrow 0}\varphi(\tau)$ *exists and is real.*

5) *φ has an analytic continuation to the cut complex plane $\mathbb{C}\backslash(\infty,0]$ such that $\Im z\cdot\Im\varphi(z)\geq 0$ for all $z\in\mathbb{C}\backslash(\infty,0]$ and the limit $\varphi(0+)=\lim_{\tau\downarrow 0}\varphi(\tau)$ exists and is real.*
6) *φ has an analytic continuation to $\mathbb{C}_{>0}$ which is given by*

$$\varphi(z)=a+bz+\int_{(0,\infty)}\frac{z}{z+t}\,d\sigma(t), \tag{A.6}$$

where $a,b\geq 0$ and σ is a Borel measure on $(0,\infty)$ satisfying (A.2).

Remark A.10. The constants a,b appearing in both representations (A.6) and (A.5) are the same. The relation between the density ρ appearing in (A.5) of the function $\varphi\in\mathcal{CBF}$ and the measure σ corresponding to the Stieltjes function $\psi(\tau)=\tau^{-1}\varphi(\tau)$ is given by

$$\rho(\tau)=\int_{(0,\infty)}e^{-\tau t}t\,d\sigma(t).$$

The next theorem shows certain nonlinear properties of the class $\mathcal{CBF}$ which gives rise to many applications of this class. Below we use the shorthand notation $\mathcal{CBF}\circ\mathcal{S}\subset\mathcal{S}$ to indicate that the composition of any $\varphi\in\mathcal{CBF}$ and $f\in\mathcal{S}$ is an element of $\mathcal{S}$, etc.

Theorem A.11. *1) $\varphi\in\mathcal{CBF}\backslash\{0\}$ if, and only if, $\varphi^*(\tau):=\tau/\varphi(\tau)$ belongs to $\mathcal{CBF}$. The call (φ,φ^*) the conjugate pair of complete Bernstein functions.*

2) *A function $\varphi\not\equiv 0$ is a complete Bernstein function if, and only if, $1/\varphi$ is a non-trivial Stieltjes function.*
3) *$\varphi\in\mathcal{CBF}$ if, and only if, $(\tau+\varphi)^{-1}\in\mathcal{S}$ for every $\tau>0$.*
4) *$\mathcal{CBF}\circ\mathcal{S}\subset\mathcal{S}$.*
5) *$\mathcal{S}\circ\mathcal{CBF}\subset\mathcal{S}$.*
6) *$\mathcal{CBF}\circ\mathcal{CBF}\subset\mathcal{CBF}$.*
7) *$\mathcal{S}\circ\mathcal{S}\subset\mathcal{CBF}$.*

We conclude this subsection with some examples of elements in the class $\mathcal{CBF}$.

Example A.3. The following are typical examples of complete Bernstein functions

$$\varphi_1(\tau)=1,\qquad \varphi_2(\tau)=\tau,\qquad \text{and}\qquad \varphi_3(\tau)=\frac{\tau}{\tau+t},\quad 0<t<\infty.$$

Using the representation (A.6) with Stieltjes measures σ of the forms

$$\frac{1}{\pi}\sin(\alpha\pi)t^{\alpha-1}dt,\quad 1\!\!1_{(0,1)}(t)\frac{dt}{2\sqrt{t}}\quad\text{and}\ \frac{1}{t}1\!\!1_{(1,\infty)}(t)dt,$$

we see that the functions

$$\varphi_4(\tau)=\tau^{\alpha},\ 0<\alpha<1,\quad \varphi_5(\tau)=\sqrt{\tau}\arctan\frac{1}{\sqrt{\tau}},\quad \text{and}\ \varphi_6(\tau)=\log(1+\tau)$$

are also complete Bernstein functions.

B The Karamata Tauberian Theorem

Tauberian theorems deals with the deduction of the asymptotic behavior of functions from a certain class (regular varying in the original of Karamata [25]) from the asymptotic behavior of their transforms (e.g. their Laplace–Stieltjes transforms). We refer to [47, Sec. 2.2] and [6] for more details and proofs.

Let $A > 0$ be given and denote by $\mathcal{F}_+(A)$ the class of positive measurable functions defined on $[A, \infty)$.

Definition B.1 (Regular and slowly varying functions)**.** Let $f \in \mathcal{F}_+(A)$ be given. We say that f is

1) *regular varying* (RV) *at infinity* in the sense of Karamata if the limit

$$K_f(\lambda) := \lim_{x\to\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)}$$

exists and is finite for all $\lambda > 0$.

2) *slowly varying* (SV) if

$$K_f(\lambda) = 1, \quad \forall \lambda > 0.$$

Proposition B.2. *Let $f \in \mathcal{F}_+(A)$ be a RV function.*

1) Then there is a real number ρ (called index of the function f) such that

$$K_f(\lambda) = \lambda^\rho, \quad \lambda > 0.$$

The index $\rho = 0$ characterizes the SV functions, that is $K_f(\lambda) = \lambda^0 = 1$.

2) Any RV function f of index ρ is represented as

$$f(x) = x^\rho l(x), \quad \forall x \geq A,$$

where l is a corresponding SV function.

We say that the functions f and g are *asymptotically equivalent at infinity*, and denote $f \sim g$ as $x \to \infty$, meaning that

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Theorem B.3 (Karamata's Tauberian Theorem)**.** *Let $U : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ be a monotone non-decreasing function such that*

$$w(x) := \int_0^\infty e^{-xs}\, dU(s) < \infty, \quad \forall x > 0.$$

Then, if $\rho \geq 0$ and L is a slowly varying function

(i) $w(x) = x^{-\rho} L\left(\frac{1}{x}\right)$ *as* $x \to 0^+ \Longrightarrow U(x) \sim x^\rho L(x)/\Gamma(\rho+1)$ *as* $x \to \infty$*;*

(ii) $w(x) = x^{-\rho} L(x)$ *as* $x \to \infty \Longrightarrow U(x) \sim x^\rho L\left(\frac{1}{x}\right)/\Gamma(\rho+1)$ *as* $x \to 0^+$*.*

Funding

José L. da Silva is a member of the Centro de Investigação em Matemática e Aplicações (CIMA), Universidade da Madeira, a research centre supported with Portuguese funds by FCT (Fundação para a Ciência e a Tecnologia, Portugal) through the Project UID/MAT/04674/2013.

References

[1] T. M. Atanackovic, S. Pilipovic, and D. Zorica. 2009. Time distributed-order diffusion-wave equation. I., II. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 465, pages 1869–1891, 1893–1917. The Royal Society.

[2] E. G. Bazhlekova. 2000. Subordination principle for fractional evolution equations. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 3(3):213–230.

[3] E. G. Bazhlekova. 2001. *Fractional Evolution Equations in Banach Spaces.* PhD thesis, University of Eindhoven.

[4] E. Bazhlekova. 2015. Subordination principle for a class of fractional order differential equations. *Mathematics*, 3(2):412–427.

[5] N. H. Bingham. 1971. Limit theorems for occupation times of Markov processes. *Z. Wahrsch. verw. Gebiete*, 17:1–22.

[6] N. H. Bingham, C. M. Goldie, and J. L. Teugels. 1987. *Regular variation*, volume 27 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Cambridge University Press, Cambridge.

[7] S. Bochner. 1955. *Harmonic Analysis and the Theory of Probability.* Univ. California Press, Berkeley.

[8] N. N. Bogoliubov. 1946. *Problems of a dynamical theory in statistical physics.* Gostekhisdat, Moskau. In Russian. English translation in J. de Boer and G. E. Uhlenbeck, editors, *Studies in Statistical Mechanics*, volume 1, pages 1-118, Amsterdam, North-Holland, 1962.

[9] B. Bolker and S. W. Pacala. 1997. Using moment equations to understand stochastically driven spatial pattern formation in ecological systems. *Theor. Popul. Biol.*, 52(3):179–197.

[10] L. Bondesson, G. K. Kristiansen, and F. W. Steutel. 1996. Infinite divisibility of random variables and their integer parts. *Statist. Probab. Lett.*, 28:271–276.

[11] Zhen-Qing Chen, Panki Kim, Takashi Kumagai, and Jian Wang. 2018. Heat kernel estimates for time fractional equations. *Forum Math.*, published online 2018-02-16.

[12] J. L. Da Silva, Y. G. Kondratiev, and P. Tkachov. 2018. Fractional kinetics in a spatial ecology model. *Meth. Funct. Anal. Topology*, 24(3):275–287.

[13] V. Daftardar-Gejji and S. Bhalekar. 2008. Boundary value problems for multi-term fractional differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 345(2):754–765.

[14] S. D. Eidelman, S. D. Ivasyshen, and A. N. Kochubei. 2004. *Analytic Methods in the Theory of Differential and Pseudo-Differential Equations of Parabolic Type*, volume 152. Springer Science & Business Media.

[15] D. Finkelshtein, Y. Kondratiev, and O. Kutoviy. 2009. Individual based model with competition in spatial ecology. *SIAM J. Math. Anal.*, 41(1):297–317.

[16] D. L. Finkelshtein, Y. G. Kondratiev, and O. Kutoviy. 2010. Vlasov scaling for stochastic dynamics of continuous systems. *J. Stat. Phys.*, 141(1):158–178.

[17] D. Finkelshtein, Y. G. Kondratiev, and O. Kutoviy. 2012. Semigroup approach to birth-and-death stochastic dynamics in continuum. *J. Funct. Anal.*, 262(3):1274–1308.

[18] D. Finkelshtein, Y. G. Kondratiev, Y. Kozitsky, and O. Kutoviy. 2015. The statistical dynamics of a spatial logistic model and the related kinetic equation. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 25(02):343–370.

[19] D. L. Finkelshtein, Y. G. Kondratiev, and P. Tkachov. 2019. Doubly nonlocal Fisher–KPP equation: Existence and properties of traveling waves. *Electr. J. Differential Equ.*, 10(1):27.

[20] N. Fournier and S. Méléard. 2004. A microscopic probabilistic description of a locally regulated population and macroscopic approximations. *Ann. Appl. Probab.*, 14(4):1880–1919.

[21] R. Gorenflo, A. A. Kilbas, F. Mainardi, and V. R. Sergei. 2014. *Mittag–Leffler Functions, Related Topics and Applications.* Springer.

[22] G. Gripenberg. 1985. Volterra integro-differential equations with accretive nonlinearity. *J. Differential Equations*, 60(1):57–79.

[23] R. Gorenflo and S. Umarov. 2005. Cauchy and nonlocal multi-point problems for distributed order pseudo-differential equations, Part one. *Z. Anal. Anwend.*, 24(3):449–466.

[24] A. Hanyga. 2007. Anomalous diffusion without scale invariance. *J. Phys. A: Mat. Theor.*, 40(21):5551.

[25] M. J. Karamata. 1933. Sur un mode de croissance régulière. Théorèmes fondamentaux. *Bull. Soc. Math. France*, 61:55–62.

[26] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo. 2006. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, volume 204 of *North-Holland Mathematics Studies.* Elsevier Science B.V., Amsterdam.

[27] A. N. Kochubei. 2008. Distributed-order calculus: An operator-theoretic interpretation. *Ukrainian Math. J.*, 60(4):551–562.

[28] A. N. Kochubei. 2008. Distributed order calculus and equations of ultraslow diffusion. *J. Math. Anal. Appl.*, 340(1):252–281.

[29] A. N. Kochubei. 2011. General fractional calculus, evolution equations, and renewal processes. *Integral Equations Operator Theory*, 71(4):583–600.

[30] A. N. Kochubei and Y. G. Kondratiev. 2017. Fractional kinetic hierarchies and intermittency. *Kinet. Relat. Models* 10(3):725–740.

[31] V. N. Kolokoltsov. 2009. Generalized continuous-time random walks, subordination by hitting times, and fractional dynamics. *Theory Probab. Appl.*, 53(4), 594–609.

[32] V. N. Kolokoltsov. 2011. *Markov Processes, Semigroups and generators*, volume 38. Walter de Gruyter.

[33] T. Kolsrud. 1992. On a class of probabilistic integrodifferential equations. In: *Ideas and Methods in Mathematics and Physics. Vol. 1*, Cambridge University Press, pp. 168–172.

[34] Y. G. Kondratiev and T. Kuna. 2002. Harmonic analysis on configuration spaces I. General theory. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, 5(2):201–233.

[35] Y. G. Kondratiev and O. Kutoviy. 2006. On the metrical properties of the configuration space. *Math. Nachr.*, 279(7):774–783.

[36] J. L. López and C. Ferreira. 2002. Asymptotic expansions of generalized Stieltjes transforms of algebraically decaying functions. *Stud. Appl. Math.*, 108(2):187–215.

[37] F. Mainardi. 2010. *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models.* World Scientific.

[38] M. M. Meerschaert and H.-P. Scheffler. 2006. Stochastic model for ultraslow diffusion. *Stochastic Process. Appl.*, 116(9):1215–1235.

[39] M. M. Meerschaert and H.-P. Scheffler. 2008. Triangular array limits for continuous time random walks. *Stochastic Process. Appl.* 118, 1606–1633.

[40] M. M. Meerschaert, H.-P. Scheffler, P.Kern. 2004. Limit theorems for continuous-time random walks with infinite mean waiting times. *J. Appl. Probab.* 41:455–466.

[41] R. Metzler and J. Klafter. 2000. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. *Phys. Rep.*, 339(1):1–77.

[42] R. Metzler and J. Klafter. 2004. The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics. *J. Phys. A*, 37(31):R161–R208.

[43] A. Mura, M.S. Taqqu and F. Mainardi. 2008. Non-Markovian diffusion equations and processes: Analysis and simulations. *Physica A*, 387: 5033–5064.

[44] J. Prüss. 1993. *Evolutionary Integral Equations and Applications*, volume 87 of *Monographs in Mathematics.* Birkhäuser Verlag, Basel.

[45] E. Ya. Riekstyn'sh. 1981. *Asymptotic Expansions of Integrals*, vol. 3. Zinatne, Riga. In Russian.

[46] K.-I. Sato. 1999. *Lévy Processes and Infinite Divisible Distributions.* Cambridge University Press, Cambridge.

[47] E. Seneta. 1976. *Regularly Varying Functions*, volume 508 of *Lect. Notes Math.* Springer.

[48] D. Sornette. 2006. *Critical Phenomena in Natural Sciences: Chaos, Fractals, Selforganization and Disorder: Concepts and Tools.* Springer Science & Business Media.

[49] R. L. Schilling, R. Song, and Z. Vondraček. 2012. *Bernstein Functions: Theory and Applications.* De Gruyter Studies in Mathematics. De Gruyter, Berlin, 2nd ed.

[50] B. Toaldo. 2015. Convolution-type derivatives, hitting times of subordinators and time-changed C_0-semigroups. *Potential Anal.* 42: 115–140.

[51] R. Wong. 2001. *Asymptotic Approximations of Integrals*, volume 34 of *SIAM's Classics in Applied Mathematics.* SIAM.

Interdisciplinary Studies of Complex Systems
No. 16 (2020) 33–43

https://doi.org/10.31392/iscs.2020.16.033

Applied philosophy in mathematics

Yuri Kondratiev[1]

Abstract. We show a possibility to apply certain philosophical concepts to the analysis of concrete mathematical structures. Such application gives a clear justification of topological and geometric properties of considered mathematical objects.

Keywords: discrete measures, configuration spaces, reflection maps

MSC: 20C99, 2005, 47B38

1 Introduction

Interdisciplinary studies represent one of main trends in the modern science. Several essential problems in the science and its applications need combination and interaction of methods and ideas from different areas of our knowledge. But there appear many practical difficulties in the realization of an interdisciplinary approach. The point is that experts in a particular topic may be not so deep involved in related areas outside their competence For example, we observe very active development of mathematical modelings in the biology and ecology. But the use of such models by experts from these disciplines is essentially restricted by the lack of mathematical techniques. From the other hand side, mathematical models looks as very simplified and degenerated ones for experts in life sciences. The only way to overcome these difficulties is to create the practical and patient collaboration between concrete scientists.

Another traditional and old circle of discussions (and many speculations) concerns the relation between concrete sciences and the philosophy. In the time of Newton and Leibniz the concept of the Naturphilosophy was a commonly accepted basis for the unification of several scientific disciplines. But necessary specialization and dissipation of particular sciences produced the divergence of philosophy and concrete sciences and even certain moral prejudices. No doubts, concrete results in physics, biology etc. are still very stimulating for philosophical studies. But we would like to show that there exists a fruitful inverse influence. The aim of this work is to illustrate a natural applied aspects of particular philosophical concepts in the framework of the mathematics. We did choose a concrete mathematical object for this illustration. Due to the interdisciplinary character of this journal, we restricted ourselves at few

[1] Bielefeld University, Germany and Dragomanov University, Kyiv, Ukraine.
kondrat@math.uni-bielefeld.de

basic observations about this object. Our explanations with necessity will be restricted technically to as less advanced level as it is possible to keep an interest of not only especially mathematical audience. For detailed mathematical description of related structures we refer to [4], [5].

The myth of Plato's Cave served as one of the motivations for creating his concept about the world of ideas and the world of things. In the dialogue "State" he gives a number of examples illustrating this position. As we know, Plato considered mathematics as one of the most important sections, used in the construction of his philosophical system. Mathematical theories can serve as simple and illustrative tools for the existence of a "world of ideas" and a "world of things." In a number of model situations, we are dealing with objects that appeal from our observations in physics, biology, ecology etc. But full understanding of the mathematical structures of these models in many cases requires consideration of more general mathematical theories, which under some canonical mapping lead to the considered model situations.

As an example, we can cite a number of recent works on the study of spaces of random discrete measures. Such measures arise in many applications, in particular, in the theory of representations of current groups (Gelfand-Graev-Vershik), in models of biosphere (motivated by V. Vernadsky), etc. It turned out that the correct understanding of the topology and geometry of spaces of discrete measures naturally arises from the suitable configuration spaces on which these concepts are already well known.These configuration spaces we called Plato spaces and their elements are interpreted as "mathematical ideas" for our models of observed phenomena (of things). Maybe a naive illustration of this approach is related to Manin's concept of the adelic world as the space of Ideas [14]. Moreover, the real component of adeles can be regarded as a "shadow" in the sense of Plato's theory. Number of similar examples in mathematical models can be big. Below we will describe a realization of the mentioned concept in a particular case of random discrete measures.

Configuration spaces form an important and actively developing area in the infinite dimensional analysis. From one hand side, these spaces represent reach mathematical structures which combine in a very non-trivial way continuous and combinatoric aspects of the analysis. From the another side, configuration spaces give natural mathematical techniques in the applications to problems of mathematical physics, biology and ecology.

Spaces of discrete Radon measures (DRM) may be considered as generalizations of configuration spaces. Main specific moment in the study of these spaces is such that the supports of discrete measures are typically not more configurations. The latter change drastically technical methods in their study. Note that spaces of DRM have several motivations coming from different areas of mathematics and applications, see comments below.

When choosing a model, one needs to take into account different features which are relevant for the behavior and properties of the system. The considered state space can be chosen as a discrete set or continuous, such as $\mathbb{R}^d$ or more generally, a Riemannian manifold X. While discrete models are easier to analyze (e.g. [13]) and yield more results, a continuous state space models a physical system more realistically.

Bounded region vs. unbounded region/state space: A bounded region makes more sense from a modeling point of view. On the other hand, one needs to take into account the interaction of particles with the boundary. A way to circumvent this is by considering an unbounded region and restricting the system after analyzing the model. The kind of region also determines whether a finite or an infinite amount of particles should be considered. Another advantage of an unbounded region with an infinite number of particles is that phase transitions may be observed since invariant measures may not be uniquely determined. For examples, see [3] and the references therein.

Different mechanisms yield different behaviors of the system. This choice of course depends on the desired phenomenon which is to be modeled. There are some additional options which were already mentioned above. For our situation, we choose a specific version of a continuous particle system with unbounded state space $\mathbb{R}^d$. Instead of considering a homogeneous configuration space, the particle system comes from the cone of positive discrete Radon measures. One specific property of this object is that particles in the space $\mathbb{R}^d$ are assigned a positive number, or "mark", which represents a property of the particle such as weight. Some general analytic and geometric considerations for models on the cone of Radon measures have been carried out in [7, 11].

Note that this approach differs from the so-called marked configuration spaces considered in [1, 12]. On the other hand, there is a direct relation to the extended configuration space which we describe below. While the analysis and dynamics on the cone are of special interest and the modeling possibilities of the cone are useful in applications, one may also give some motivations for this object without referring to these analytical properties or configuration spaces in general. Below we explains three motivations from theoretical biology, probability theory and representation theory.

The mathematical object of interest for us is the cone of positive DRM, defined by

$$\mathbb{K}(\mathbb{R}^d) := \left\{ \eta = \sum_i s_i \delta_{x_i} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \middle| s_i \in (0,\infty), x_i \in \mathbb{R}^d \right\}$$

where by convention, the zero measure $0 \in \mathbb{K}(\mathbb{R}^d)$ is included. This work is concerned with the analytic properties of the cone. On the other hand, there are three approaches which justify the use of this object without even considering its analytical properties. For one, there is the aspect of modeling biological systems. Second, the cone appears naturally when considering certain generalized stochastic processes. Third, the cone is given as the space where Gamma measures are localized, which emerge from representation theory for current groups. These three motivations will be explained below.

There is an external non-mathematical motivation to study particle systems realized as elements of the cone. Namely, Vladimir Vernadsky wrote the following:

- "Organisms [...] are always separated from the surrounding inert matter by a clear and firm boundary." [19, p. 56]
- "Living matter [...] is spread over the entire surface of the Earth in a manner analogous to a gas [...]." [19, p. 59]
- "In the course of time, living matter clothes the whole terrestrial globe with a continuous envelope [...]." [19, p. 60]

This can be interpreted in the sense that system of living matter should possess two properties: For one, the system should have a discrete nature. Furthermore, there is living matter everywhere in the system. In mathematical terms, this means that the support of this system should be dense in the underlying position space. Lastly, to be realistic, the system should have finite local mass due to the physical limitations of our world. The mathematical realization of these properties is given by the cone.

The second motivation comes from the theory of generalized stochastic processes, i.e. processes on the space $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ of generalized functions. By [17, Thm. 3.3.24], infinitely divisible processes on $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ are actually concentrated on the subspace $\mathbb{K}(\mathbb{R}^d)$. Note that this result holds independently of the topological and analytical considerations done in later chapters. For a subclass of measures, the so-called Gamma measures, we will also show a direct proof of this statement.

Measures supported on $\mathbb{K}(\mathbb{R}^d)$ naturally appear in the study of representations for current groups. Namely, when studying so-called commutative models of representations of $(SL(2,\mathbb{R}))^{\mathbb{R}^d}$. When considering representations with respect to the unipotent subgroup of $(SL(2,\mathbb{R}))^{\mathbb{R}^d}$, we arrive at spectral measures which are defined on the space $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ and supported on $\mathbb{K}(\mathbb{R}^d)$. Furthermore, these measures show some invariance properties. These considerations were first done by Gelfand, Graev and Vershik [6]. Later, Tsilevich, Vershik and Yor [18] used this as a starting point to further analyze so-called Gamma processes.

As seen here, these measures supported on the cone $\mathbb{K}(\mathbb{R}^d)$ appear naturally without any *a priori* restriction of the spaces or aspects of modeling.

There is another mathematical explanation why it makes sense to consider $\mathbb{K}(\mathbb{R}^d)$. If we take the class of Gamma-Poisson-measures on the extended configuration space $\Gamma(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$, we see that these measures assign full mass to the subset of configurations with finite local mass, or Plato configurations. These configurations can be identified with objects in the cone, i.e. there exists a one-to-one correspondence between the so-called Plato space $\Pi(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$ and the cone $\mathbb{K}(\mathbb{R}^d)$ [4].

2 Preliminaries

This section will include basic concepts from configuration spaces $\Gamma(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$, the cone $\mathbb{K}(\mathbb{R}^d)$ and the connection between these two.

2.1 The Cone of Positive Discrete Radon Measures

We start by the introduction of the cone of positive discrete Radon measures as the subset of the space of Radon measures $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Furthermore, the notion of the support of a measure and relations between elements in $\mathbb{K}(\mathbb{R}^d)$ are defined. Recall that by Vernadsky's theory of living matter, a system should be dense everywhere, discrete and have finite local mass.

One more property which we want from our system is that its elements are indistinguishable in the sense that the system given by $(s_i, x_i)_{i\in I}$ and $(s_{\pi(i)}, x_{\pi(i)})_{i\in I}$ behave the same, where I is some countable index set and π

an arbitrary permutation of I. One possibility is to realize our system as sums of point masses δ_y, where y is either the mark and position, or just the position of a particle, depending on the setup. This automatically yields a discrete particle system. To obtain the other two properties, it is useful to let y represent the position of a particle, while the mark is considered as a weight of the point mass. These properties become clear when we consider a certain class of measures, namely, Gamma measures.

Definition 2.1. 1) The cone of nonnegative discrete Radon measures is defined as follows:

$$\mathbb{K}(\mathbb{R}^d) := \left\{ \eta = \sum_i s_i \delta_{x_i} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \middle| s_i \in (0,\infty), x_i \in \mathbb{R}^d \right\}$$

By convention, the zero measure $\eta = 0$ is included in $\mathbb{K}(\mathbb{R}^d)$.

2) We denote the support of $\eta \in \mathbb{K}(\mathbb{R}^d)$ by

$$\tau(\eta) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid 0 < \eta(\{x\}) =: s_x(\eta)\}.$$

If η is fixed, we write $s_x := s_x(\eta)$.

3) For $\eta, \xi \in \mathbb{K}(\mathbb{R}^d)$ we write $\xi \subset \eta$ if $\tau(\xi) \subset \tau(\eta)$ and $s_x(\xi) = s_x(\eta)$ for all $x \in \tau(\xi)$. If additionally $|\tau(\xi)| < \infty$, we write $\xi \Subset \eta$.

4) For a function $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, denote the pairing with an element $\eta \in \mathbb{K}(\mathbb{R}^d)$ by

$$\langle f, \eta \rangle := \sum_{x \in \tau(\eta)} s_x f(x).$$

While $\mathbb{K}(\mathbb{R}^d)$ can be viewed as a subset of the space of positive Radon measures $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, it is not advisable to consider it as a subset topologically. This method works for the space $\Gamma(Y)$ introduced below, as will be explained later. For $\mathbb{K}(\mathbb{R}^d)$, it does not yield satisfactory topological results. Instead, we keep Plato's theory in mind and see $\mathbb{K}(\mathbb{R}^d)$ as the real-world projection of another space, called the Plato space $\Pi(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$.

2.2 Plato's theory

As stated in the introduction, the cone $\mathbb{K}(\mathbb{R}^d)$ is a suitable object to describe particle systems in the real world. On the other hand, the question arises how to define and interpret mathematical structures on the space $\mathbb{K}(\mathbb{R}^d)$. As a motivation, we give a short overview of Plato's theory of forms.

In the theory, Plato stated that observations in the real world are mere projections of higher forms or ideas. One way to picture this is the so-called cave allegory, which was recited by Ross (1951) as follows: "A company of men is imprisoned in an underground cave, with their heads fixed so that they can look only at the back wall of the cave. Behind them across the cave runs a wall behind which men pass, carrying all manner of vessels and statues which overtop the wall. Behind these again is a fire. The prisoners can only see the shadows [...] of the things carried behind the wall, and must take these to be the only realities" [15, P. 69].

Applied to our setting, the space $\mathbb{K}(\mathbb{R}^d)$ is interpreted as the shadows projected onto the cave wall. On the other hand, the space $\Pi(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$ which will be introduced below is the space of forms or ideas, represented by the objects carried in front of the fire. While the space $\mathbb{K}(\mathbb{R}^d)$ is taken to be our reality, we use the space $\Pi(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$ to define mathematical operations. The spaces are connected via the bijection $\mathcal{R}\colon \Pi(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d) \to \mathbb{K}(\mathbb{R}^d)$ introduced below. In accordance with the cave allegory, $\mathcal{R}$ is also called reflection mapping.

2.3 Configuration Spaces

As we will see in the next chapter, the Plato space $\Pi(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$ is a specific subset of the so-called configuration space $\Gamma(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$, which will fulfill the assumptions stated heuristically in Chapter 2.1.

In general, the space of locally finite configurations $\Gamma(Y)$ is the space of all subsets of Y which are finite in any compact set $\Lambda \subset Y$. The following definition makes this notion more precise.

Definition 2.2. Let Y be a locally compact Hausdorff space. The space of locally finite configurations over Y is defined as

$$\Gamma(Y) = \{\gamma \subset Y\colon |\gamma \cap \Lambda| < \infty \ \forall \Lambda \subset Y \text{ compact}\}$$

where $|\cdot|$ denotes the number of elements of a set.

From a physical perspective, Y is considered as phase space of an interacting particle system. A configuration $\gamma \in \Gamma(Y)$ represents a set of indistinguishable agents (e.g. particles, plants) which may interact with each other. In our considerations, we always consider $Y = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d$. More generally, $\mathbb{R}^d$ could be replaced by some more general locally comapct space X. In this chapter, we recall some properties of $\Gamma(Y)$ which will form the basis for the Plato space $\Pi(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$.

2.3.1 Topology and Measurable Structure of $\Gamma(Y)$

There exists a natural embedding of $\Gamma(Y)$ into the space of Radon measures $\mathcal{M}(Y)$ on Y, namely

$$\Gamma(Y) \ni \gamma \mapsto \sum_{y\in\gamma} \delta_y \in \mathcal{M}(Y)$$

where δ_y denotes the Dirac measure at point $y \in Y$. We equip $\Gamma(Y)$ with the vague topology induced by $\mathcal{M}(Y)$, i.e. the coarsest topology such that the following mappings are continuous for all $f \in C_c(Y)$, where $C_c(Y)$ denotes the space of continuous functions with compact support:

$$\Gamma(Y) \ni \gamma \mapsto \langle f, \gamma\rangle = \sum_{y\in\gamma} f(y)$$

In fact, $\Gamma(Y)$ equipped with this topology is a Polish space. A more detailed analysis of the topological properties of $\Gamma(Y)$ can be found in [10].

The construction of a topology enables us to consider the Borel-σ-algebra $\mathcal{B}(\Gamma(Y))$. It should be noted that this σ-algebra coincides with the σ-algebra generated by the following mappings:

$$N_\Lambda \colon \Gamma(Y) \to \mathbb{N}_0, \gamma \mapsto N_\Lambda(\gamma) = |\gamma \cap \Lambda|,\ \Lambda \in \mathcal{B}_c(Y)$$

where $\mathcal{B}_c(Y)$ denotes all pre-compact Borel subsets of Y, see e.g. [9].

We give another construction of the measurable space $(\Gamma(Y), \mathcal{B}(\Gamma(Y))$ which will be useful for other considerations. For $\Lambda \in \mathcal{B}_c(Y)$, we define the space of configurations supported in Λ.

$$\Gamma(\Lambda) := \{\gamma \in \Gamma(Y) \colon \gamma \cap \Lambda = \gamma\}.$$

Furthermore, for $n \in \mathbb{N}$, consider the set of n-point-configurations supported in Λ:

$$\Gamma^{(n)}(\Lambda) := \{\gamma \in \Gamma(\Lambda) \colon |\gamma| = n\}, \Gamma^{(0)}(\Lambda) := \{\emptyset\}$$

Since $\gamma \in \Gamma(Y)$ is locally finite, the elements of $\Gamma(\Lambda)$ are finite and we have the disjoint decomposition

$$\Gamma(\Lambda) = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \Gamma^{(n)}(\Lambda). \tag{2.1}$$

We can represent $\Gamma^{(n)}(\Lambda)$ via symmetrization of the underlying space:

$$\tilde{\Lambda}^n / S_n \simeq \Gamma^{(n)}(\Lambda) \tag{2.2}$$

where

$$\tilde{\Lambda}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \Lambda^n \mid x_i \neq x_j \ \forall i \neq j\}$$

the off-diagonals and S_n the symmetric group of n elements. This way, $\Gamma^{(n)}(\Lambda)$ can be equipped with the topology induced via Λ^n. Furthermore, $\Gamma(\Lambda)$ is equipped with the topology of disjoint unions. Hence, we can define the Borel-σ-algebra $\mathcal{B}(\Gamma(\Lambda))$ given by this topology.

For two sets $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{B}(Y), \Lambda_2 \subset \Lambda_1$, define the projection mapping

$$p_{\Lambda_1,\Lambda_2} \colon \Gamma(\Lambda_1) \to \Gamma(\Lambda_2), \gamma \mapsto \gamma \cap \Lambda_2$$

where we set $p_{\Lambda_2} := p_{Y,\Lambda_2}$. It was shown in e.g. [16] that $(\Gamma(Y), \mathcal{B}(\Gamma(Y))$ is the projective limit of the spaces $(\Gamma(\Lambda), \mathcal{B}(\Gamma(\Lambda))$ for $\Lambda \in \mathcal{B}_c(Y)$. This especially implies that the mappings p_Λ are $\mathcal{B}(\Gamma(Y))$-$\mathcal{B}(\Gamma(\Lambda))$-measurable. The construction of $\mathcal{B}(\Gamma(Y))$ via projections will play an important role in the construction of measures on $\Gamma(Y)$.

2.3.2 The Space of Finite Configurations

For mathematical purposes, it is important to also consider the space $\Gamma_0(Y)$ of finite configurations, i.e.

$$\Gamma_0(Y) := \{\gamma \in \Gamma(Y) \colon |\gamma| < \infty\}$$

where $|\cdot|$ denotes the number of elements of a set. While the definition implies that $\Gamma_0(Y)$ is a subset of $\Gamma(Y)$, the interpretation is a different one: $\Gamma_0(Y)$

serves as a mathematical counterpart to the physical space $\Gamma(Y)$. Also, the spaces $\Gamma(Y)$ and $\Gamma_0(Y)$ are topologically different: While $\Gamma(Y)$ is seen as a subspace of $\mathcal{M}(Y)$ with the inherited topology, we use a different approach for $\Gamma_0(Y)$ which will be explained in this chapter. The approach is similar to the one used in Chapter 2.3.1, but yields different results. We set

$$\Gamma_0^{(n)}(\Lambda) := \Gamma^{(n)}(\Lambda)$$

where Λ is an arbitrary Borel subset of Y. Since we only deal with finite configurations, we may use decomposition (2.1) for $\Lambda = Y$, i.e.

$$\Gamma_0(Y) = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \Gamma_0^{(n)}(Y).$$

Furthermore, we may consider the symmetrization (2.2) to obtain

$$\tilde{Y}^n / S_n \simeq \Gamma^{(n)}(Y).$$

For $\Gamma^{(n)}(Y)$, we choose the topology induced by the space Y^n. For $\Gamma_0(Y)$, we may use the topology of disjoint unions. For a more detailed description of the topology used here, we refer to [9].

Remark 2.3. The purpose of the space of finite configurations will become clearer once we examine specific models. Since the models are introduced on the cone, we postpone this discussion until after we have introduced the relevant spaces related to $\mathbb{K}(\mathbb{R}^d)$.

2.4 Relation Between $\mathbb{K}(\mathbb{R}^d)$ and $\Gamma(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$: The Plato Space $\Pi(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$

In this section, we want to establish the connection between the configuration space $\Gamma(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$ and the cone $\mathbb{K}(\mathbb{R}^d)$. Our goal is to define a certain subspace $\Pi(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d) \subset \Gamma(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$ such that there exists a one-to-one-correspondence between $\Pi(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$ and $\mathbb{K}(\mathbb{R}^d)$ in the following form:

$$\mathcal{R}\colon \Pi(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d) \to \mathbb{K}(\mathbb{R}^d), \gamma = \sum_{(s,x)\in\gamma} \delta_{(s,x)} \mapsto \sum_{(s,x)\in\gamma} s\delta_x.$$

In terms of Plato's theory, this mapping takes ideas $\gamma \in \Pi(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$ and projects (or reflects) them to real-world objects $\eta \in \mathbb{K}(\mathbb{R}^d)$. Obviously, $\mathcal{R}$ is not defined on the whole space $\Gamma(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$. Therefore, we need to construct a suitable subspace. In other terms, the Plato space constructed below is also known as the set of pinpointing configurations with finite local mass, denoted by $\Gamma_{\mathrm{pf}}(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$. We explore these two properties in more detail below.

Define the set of pinpointing configurations $\Gamma_{\mathrm{p}}(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d) \subset \Gamma(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$ as all configurations such that if $(s_1, x_1), (s_2, x_2) \in \gamma$ with $x_1 = x_2$, then $s_1 = s_2$.

Remark 2.4. The pinpointing property ensures that there are no two elements of a system at the same position. Due to the shape of elements in $\mathbb{K}(\mathbb{R}^d)$, it is obvious that this would not be possible.

Let us now take into account the second property of $\Pi(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$. To this end, we define the local mass of a configuration.

Definition 2.5. For a configuration $\gamma \in \Gamma_{\mathrm{p}}(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$ and $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ compact, set the local mass as

$$\gamma(\Lambda) = \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} s 1_\Lambda(x) d\gamma(s,x) = \sum_{(s,x)\in\gamma} s 1_\Lambda(x) \in [0,\infty]$$

This notion enables us to define the Plato space.

Definition 2.6. The Plato space $\Pi(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d) \subset \Gamma(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$ is defined as the space of all pinpointing configurations with finite local mass, i.e.

$$\Pi(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d) := \Gamma_{\mathrm{pf}}(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d) = \{\gamma \in \Gamma_p \mid \gamma(\Lambda) < \infty \text{ for all } \Lambda \subset \mathbb{R}^d \text{ compact}\}.$$

Remark 2.7.

1) The property of finite local mass accounts for the third property stated in Chapter 2.1. It ensures that the system only has finite mass in any bounded volume, which makes it physically viable.
2) The pinpointing property as well as the finiteness of local mass are sufficient to make $\mathcal{R}\colon \Pi(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d) \to \mathbb{K}(\mathbb{R}^d)$ bijective.
3) The state space needs to be of the specific form $Y = \mathbb{R}_+^* \times X$ for the notion of pinpointing configurations to make sense.

Definition 2.8. Let $f \in C_c(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$ and $\eta \in \mathbb{K}(\mathbb{R}^d)$. Define the following pairing:

$$\langle\langle f, \eta \rangle\rangle := \langle f, \mathcal{R}^{-1}\eta \rangle = \sum_{(s,x)\in\mathcal{R}^{-1}\eta} f(s,x)$$

3 Topology and Measure-Theoretical Structures

In this chapter, we want to introduce a suitable topology on the cone $\mathbb{K}(\mathbb{R}^d)$. To this end, we consider the topology induced on $\Pi(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$ by the extended configuration space $\Gamma(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$. Next, we use the mapping $\mathcal{R}$ to induce a topology on $\mathbb{K}(\mathbb{R}^d)$.

3.1 Topology on the Cone $\mathbb{K}(\mathbb{R}^d)$

The Plato space $\Pi(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$ naturally inherits the topological structure of $\Gamma(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$, i.e. the topology is given by the vague topology induced from the space of Radon measures $\mathcal{M}(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$. For a detailed description of topological and metric characterizations, see e.g. [10].

Remark 3.1. The space $\Pi(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$ is not complete: Take for example some $x_0 \in \mathbb{R}^d$ and $s_1 \neq s_2 \in \mathbb{R}_+^*$. Furthermore, consider sequences $s_i^{(n)}, x_i^{(n)}, i = 1, 2$ with $s_1^{(n)} \neq s_2^{(n)}, x_1^{(n)} \neq x_2^{(n)}$ for all $n \in \mathbb{N}$ and

$$s_i^{(n)} \to s_i, x_i^{(n)} \to x_i,\ n \to \infty, i = 1, 2.$$

Set

$$\gamma^{(n)} := \{(s_1^{(n)}, x_1^{(n)}), (s_2^{(n)}, x_2^{(n)})\} \in \Pi(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$$
$$\gamma := \{(s_1, x_0), (s_2, x_0)\} \in \Gamma(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d) \setminus \Pi(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$$

Let $f \in C_c(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$. Then

$$\begin{aligned} |\langle f, \gamma^{(n)}\rangle - \langle f, \gamma\rangle| &= |f(s_1^{(n)}, x_1^{(n)}) + f(s_2^{(n)}, x_2^{(n)}) - f(s_1, x_0) - f(s_2, x_0)| \\ &\leq |f(s_1^{(n)}, x_1^{(n)}) - f(s_1, x_0)| + |f(s_2^{(n)}, x_2^{(n)}) - f(s_2, x_0)| \\ &\to 0,\ n \to \infty. \end{aligned}$$

Therefore, $\gamma^{(n)} \to \gamma,\ n \to \infty$ in $\Gamma(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$ and $\Pi(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$ is not complete.

From a naive point of view, it seems to make sense to consider the embedding $\mathbb{K}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ of the cone into the space of Radon measures, equipped with the vague topology. Unfortunately, this topology has no relation to the vague topology introduced above on $\Pi(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$. In the spirit of Plato's theory of ideas, the connection between $\Pi(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$ and $\mathbb{K}(\mathbb{R}^d)$ is essential. Therefore, we consider the final topology on $\mathbb{K}(\mathbb{R}^d)$ induced by the reflection mapping $\mathcal{R}$, i.e. the finest topology such that the mapping

$$\mathcal{R}\colon \Pi(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d) \to \mathbb{K}(\mathbb{R}^d), \gamma = \sum_{(s_x, x) \in \gamma} \delta_{(s_x, x)} \mapsto \sum_{x \in \tau(\gamma)} s_x \delta_x$$

is continuous. Here, we set for $\gamma \in \Pi(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$,

$$\tau(\gamma) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \exists s \in \mathbb{R}_+^*\colon (s, x) \in \gamma\}$$

the support of γ. The usage of this topology has the obvious side effect that $\mathcal{R}$ becomes a homeomorphism, which is helpful in and of itself in other regards.

In the further development of the considered theory is important to implement the construction of a class of probability measures on $\Pi(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$, namely, Poisson measures. The construction may be done on the larger space $\Gamma(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$. For the class of Poisson measures, we can show that they assign full mass to the Plato space $\Pi(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$. To obtain measures on $\mathbb{K}(\mathbb{R}^d)$, we use the pushforward of measures on $\Pi(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$ under the mapping $\mathcal{R}$. A certain subclass of specific interest is the class of Gamma measures. For the detailed analysis we refer the reader to [4], [5].

References

[1] S. Albeverio, Y. G. Kondratiev, E.W. Lytvynov, and G. F. Us. 2006. Analysis and geometry on marked configuration spaces. *arXiv Mathematics e-prints*, math/0608344.

[2] S. Albeverio, Yu. G. Kondratiev, and M. Röckner. 1998. Analysis and geometry on configuration spaces. *J. Funct. Anal.*, 154(2):444–500.

[3] A. Daletskii, Y. G. Kondratiev, and Y. Kozitsky. 2015. Phase transitions in continuum ferromagnets with unbounded spins. *J. Math. Phys.*, 56(11):113502, 16.

[4] D.Finkelshtein, Y.Kondratiev, P.Kuchling, and M.J.Olivera. 2020. Analysis and geometry on the cone of discrete Radon measures I. *Methods Funct. Anal. Topology* (to appear).

[5] D.Finkelshtein, Y.Kondratiev, P.Kuchling, and M.J.Olivera. 2020. Analysis and geometry on the cone of discrete Radon measures II. *Methods Funct. Anal. Topology.* (to appear).

[6] I. M. Gelfand, M. I. Graev, and A. M. Vershik. 1985. Models of representations of current groups. In *Representations of Lie groups and Lie algebras (Budapest, 1971)*, pages 121–179. Akad. Kiadó, Budapest.

[7] D. Hagedorn, Y. G. Kondratiev, E. Lytvynov, and A. Vershik. 2016. Laplace operators in gamma analysis. In *Stochastic and infinite dimensional analysis*, Trends Math, pages 119–147. Birkhäuser/Springer, [Cham].

[8] D. Hagedorn, Y. G. Kondratiev, T. Pasurek, and M. Röckner. 2013. Gibbs states over the cone of discrete measures. *J. Funct. Anal.*, 264(11):2550–2583.

[9] Y. G. Kondratiev and T. Kuna. 2002. Harmonic analysis on configuration space. I. General theory. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, 5(2):201–233.

[10] Y. G. Kondratiev and O. Kutoviy. 2006. On the metrical properties of the configuration space. *Math. Nachr.*, 279(7):774–783.

[11] Y. G. Kondratiev, E. Lytvynov, and A. Vershik. 2015. Laplace operators on the cone of Radon measures. *J. Funct. Anal.*, 269(9):2947–2976.

[12] Y. G. Kondratiev, E. W. Lytvynov, and G. F. Us. 2006. Analysis and geometry on R_+-marked configuration spaces. *arXiv Mathematics e-prints*, page math/0608347.

[13] T. M. Liggett. 1985. *Interacting particle systems*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 276, Springer-Verlag, New York.

[14] Yu. I. Manin. 1989, Reflections on arithmetic physics. In: *Invariance and string theory* Academic Press, pp. 293–303.

[15] W. D. Ross. *Plato's theory of ideas.* Clarendon Pr., Oxford, 1951.

[16] H. Shimomura. Poisson measures on the configuration space and unitary representations of the group of diffeomorphisms. *J. Math. Kyoto Univ.*, 34(3):599–614, 1994.

[17] A. Skorohod. *Random processes with independent increments*, volume 47 of *Mathematics and its Applications (Soviet Series).* Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991. Translated from the second Russian edition by P. V. Malyshev.

[18] N. Tsilevich, A. Vershik, and M. Yor. An infinite-dimensional analogue of the Lebesgue measure and distinguished properties of the gamma process. *J. Funct. Anal.*, 185(1):274–296, 2001.

[19] V. I. Vernadsky. *Living Matter in the Biosphere*, pages 56–60. Springer New York, New York, NY, 1998.

Хімія, біологія та медицина

Chemistry, biology and medicine

Interdisciplinary Studies of Complex Systems
No. 16 (2020) 47–59

https://doi.org/10.31392/iscs.2020.16.047

Біохімічні та медичні дослідження бактерицидної активності гідрогелів з наночастинками срібла

Павло Вірич[1,2], *Оксана Надтока*[1,3], *Петро Вірич*[4], *Віктор Мартинюк*[1,5], *Наталія Куцевол*[1,6]

Анотація. Лікування ран передбачає створення умов для регенерації тканин та запобігання бактеріального зараження. Як антибактеріальні засоби використовують антибіотики, бактеріостатичні органічні речовини, іони металів та їх оксиди. Ми використовували гідрогелі поліакриламіду (P) та кополімеру декстран-поліакриламіду (DP) з різним вмістом зшиваючого агента N, N'-метилен-біс-акриламіду — 0.2%, 0.4%, 0.6%. Синтез AgNP в матрицях полімерів проводили ультрафіолетовою лампою при 365 нм. Розміри AgNP визначали за плазмонним резонансом на оптичних спектрами в діапазоні 300-800 нм.

Аналіз оптичного поглинання AgNP в поліакриламідних та дексан-поліакриламідних гідрогелях із кількістю зшиваючого агента 0,2%, 0,4%, 0,6% показали, що умови утворення наночастинок срібла майже однакові, а їх діаметр знаходиться в межах 20-40 нм.

Дослідження антибактеріальної активності проводили диско-дифузійним методом на агарі Мюллера-Хіінтона з використанням диких штамів Staphylococcus aureus та Escherichia coli. Інфікування відкритих ран проводили сумішшю диких штамів S. aureus and E. coli. Лікеування ран проводили класичним методом стерильних марлевих пов'язок, порожніми гідрогелями та з наночастинками срібла. Виявлено високу чутливість диких штамів S. aureus та E. coli до дії гідрогелю, що містить 20% розчин хлоргексидину. Діаметр затримки росту знаходиться в межах 15 мм. Серед переліку використаних матеріалів найвищу бактерицидну активність виявляють гідрогелі 0.4P та 0.4DP з AgNP. Їх ефективність вища на 45% для S. aureus і на 20% для E. coli порівняно з класичним антисептиком — хлоргексидином. Дослідження матеріалів in vivo, проведених на відкритих ранах із штучним бактеріальним зараженням, показали прискорення процесу загоєння при використанні гідрогелів 0.4P та 0.4DP з AgNP відносно класичного методу використання стерильних марлевих пов'язок. Застосування цих гідрогелів для лікування відкритих ран, заражених S. aureus та E. coli, допомагає прискорити процес загоєння та підтримує антисептичні умови протягом певного часу.

Серед переліку перевірених гідрогелів, найбільш доцільно з метою лікування відкритих ран, використовувати поліакриламід та кополімер декстран-20 000 — поліакриламід з кількістю зшиваючого агента 0,4% (m/m), які містять наночастинки срібла з середнім діаметром 20-40 нм. Це пов'язано з їх високою ефективністю відносно грам-позитивних та грам-негативних мікроорганізмів та підтримці бактерицидних і бактеріостатичних умов, оптимальних для загоєння відкритих ран.

Ключові слова: поліакриламід, гідрогель, наночастинки срібла, антибактеріальна активність, лікування ран

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна.
[2] sphaenodon@ukr.net, https://orcid.org/0000-0002-1463-1992
[3] oksananadtoka@ukr.net, https://orcid.org/0000-0003-1868-3885
[4] ДУ «Інститут отоларингології ім. проф. О.С. Коломійченка НАМН України», Київ, Україна. annelida@ukr.net, https://orcid.org/0000-0001-6201-3892
[5] mavispublisher@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-5311-3565
[6] kutsevol@ukr.net, https://orcid.org/0000-0002-1468-4111

Biochemical and medical studies of bactericidal activity of hydrogels with silver nanoparticles

Pavlo Virych, Oksana Nadtoka, Petro Virych,
Viktor Martynyuk, Natalia Kutsevol

Abstract. Wound treatment involves creating conditions for tissue regeneration and prevention of bacterial contamination. As antibacterial agents use antibiotics, bacteriostatic organic substances, metal ions and their oxides. We used polyacrylamide(P) and copolymer dextran-polyacrylamide (DP) hydrogels with different contain of cross-linking agent N,N'-methylen-bis-acrylamide 0.2%, 0.4%, 0.6%. AgNPs synthesis in polymers matrices activated by UV-lamp at 365 nm. The size of AgNP was evaluated by means of plasmon resonance light absorption in the range at 300-800 nm.

Analysis of the light absorption of AgNPs in polyacrylamide and dextane-polyacrylamide hydrogels with the crosslinking agent 0.2%, 0.4%, 0.6% indicated that the conditions of silver nanoparticles formation are almost the same and their diameter is in the range of 20-40 nm.

We investigated the antibacterial activity using a disc-diffusion method in Muller-Hinton agar on wild strains Staphylococcus aureus and Escherichia coli. The infection of the open wounds in rats was provoked by mixture of E. coli and S. aureus. The treatment was carried out by classical method using covering with a sterile bandage, pure hydrogel and hydrogel with silver nanoparticles. We found a high sensitivity of wild strains of S. aureus and E. coli to the action of hydrogel containing 20% chlorhexidine solution. The diameter of the growth retardation was around 15 mm. Among materials, we used the 0.4P and 0.4DP hydrogels with AgNPs demonstrated the highest antibacterial activity. Their efficacy were higher on 45% for S. aureus and 20% for E. coli compared to the classic antiseptic chlorhexidine.

The test of 0.4P and 0.4DP hydrogels in vivo that was conducted on open wounds upon experimental bacterial contamination showed an acceleration of healing process in relation to the classical method with using sterile gauze bandages. The use of these hydrogels for the treatment of open wounds infected by S. aureus and E. coli are helps to accelerate the healing process and maintains antiseptic conditions for some time.

The most appropriate for the treatment of open wounds are the polyacrylamide and the copolymer dextran- polyacrylamide with 0.4% (m/m) of cross-link agent contained silver nanoparticles with an average diameter 20-40 nm. Due to their high efficiency against gram-positive and gram-negative microorganisms, these hydrogels are optimal for open wounds treatment.

Keywords: polyacrylamide, hydrogel, argentum nanoparticles, antibacterial activity, treatment of wounds

Протягом останніх років значні зусилля спрямовані на розробку штучних біосумісних матеріалів. Основний вектор досліджень спрямований на створення матеріалів, що відповідають необхідним вимогам для імітації умов регенерації тканин та забезпечення стерильності. Перелік вимог задовольняють полімерні матеріали — гідрогелі, які складаються з поперечно зшитих хімічним чи фізичним способом ланцюгів [1, 2], а деякі з них виявляють власну бактерицидну активність [3]. Завдяки фізико-хімічним властивостям, низькій токсичності та здатності утримувати в структурі різні речовини, такі матеріали можна використовувати для лікуванні відкритих ран.

Відкриття та початок використання антибіотиків дозволив знизити рівень смертності від бактеріального зараження ран, але, разом з цим, з'явилися резистентні до дії антибіотиків штами [4], що спонукало до пошуку альтернативних антибактеріальних засобів. Одними з них виявилися комбіновані гідрогелі [3]. Вони використовуються як альтернатива антибіотикам при зовнішньому застосуванні та здатні формувати антибактеріальні покриття. Активні компоненти представлені іонами важких металів, їх оксидів та екстрактами з живих організмів [3]. До принципових недоліків таких матеріалів відноситься цитотоксичність відносно еукаріотичних тканин, що обмежує сферу їх застосування.

Зважаючи на широке розповсюдження резистентних до антибіотиків штамів мікроорганізмів [4, 5, 6, 7], доцільно застосовувати як антимікробний агент речовини, до дії яких не розвиваються механізми захисту. Їх дія включає декілька мішеней, які досить консервативні, щоб швидко змінювати структуру, як наприклад, це відбувається з бета-лактамазами [8]. Важлива властивість таких сполук їх розчинність у воді. Проте, більшість оксидів металів, які придатні до застосування на живих тканинах, нерозчинні у воді, що знижує їх ефективність. Високу бактерицидну активність проявляють іони металів, серед яких, зокрема, такий бактерицидний агент, як іони арґентуму. Механізм дії Ag^+базується на взаємодіях із вільними гідроген сульфідними групами протеїнів мембрани бактеріальних клітин [3]. Але у вільному стані іони арґентуму при реакції з киснем утворюють оксид, який не виявляє помітної біологічної активності. Проблему вирішують формуванням наночастинок та їх стабілізацією різними агентами. У зв'язку з цим привертає увагу той факт, що саме структурна організація гідрогелю визначає розміри наночастинок та ефективно стабілізує їх [9].

Наночастинки срібла (AgNPs) проявляють високу бактерицидну активність. Відновлена форма срібла (Ag^0) наночастинки, не виявляє біологічної активності, але за присутності в середовищі кисню та протонів відбувається наступна реакція:

$$4\mathrm{Ag} + \mathrm{O_2} = 2\mathrm{Ag_2O}$$
$$2\mathrm{Ag_2O} + 2\mathrm{H^+} = 4\mathrm{Ag^+} + 2\mathrm{H_2O}$$

Саме вивільнені арґентум-іони викликають цитотоксичні ефекти [10]. Механізм дії базується на взаємодії із гідроген сульфідними групами протеїнів бактеріальних мембран, що призводить до порушення їх функції, нейтралізації трансмембранного іонного градієнту та некрозу клітини Важливо, що резистентність до дії Ag^+ розвивається повільно, порівняно з антибіотиками [11].

Насичення структури гідрогелю наночастинками срібла дозволяє надати матеріалу антибактеріальних властивостей, а високий вміст води та відсутні токсичні ефекти на оточуючі тканини сприяють більш швидкому загоєнню ран. Основу гідрогелю можуть формувати природні полімери, їх модифікації або синтетичні полімери. Серед природних, поширені альгінати та хітозан, а включення у структуру наночастинок срібла надає їм бактерицидних властивостей [12, 13]. До переваг таких матеріалів відносяться здатність до біодеградації, біологічна сумісність та низька алергенність, разом з тим час їх зберігання обмежений.

Серед гідрогелів на базі синтетичних полімерів найчастіше використовують поліакриалмід, поліакрилову кислоту, поліетиленгліколь, полівініловий спирт, полівінілпіролідон та ін. [3]. До переваг таких матеріалів відносять можливість контролювати загальну структуру і розміри пор, завдяки зміні кількості введеного зшиваючого агента та концентації мономеру в процесі синтезу. Особливої уваги заслуговує поліакриламід, який імітує пептидну структуру і сприяє регенерації шкіри. Надання гідрогелям на його основі бактерицидних властивостей, попереджає бактеріальному зараженню пошкоджених тканин, що знижує ризик розвитку запалення та виразок.

Мета дослідження полягала у порівнянні бактерицидної активності гідрогелів різної структури на основі поліакриламіду та кополімеру декстран–поліакриламід із наночастинками срібла, які синтезовано *in situ* в гідрогелевих матеріалах.

Матеріали та методи

Отримання гідрогелів

Два типи хімічно зшитих гідрогелів на основі поліакриламіду (P) та прищепленого кополімеру декстран-поліакриламід (DP) отримано методом радикальної полімеризації та кополімеризації з використанням амоній церій нітрату як ініціатора та N,N'-метилен-біс-акриламіду як зшиваючого агента [14]. Для синтезу гідрогелів використовували акриламід (Sigma Aldrich) та декстран із Mw=20 000 г/моль (Fluka). Розміри пор контролювали шляхом використання різної кількості зшиваючого агента в реакційній суміші: 0,2%, 0,4%, 0,6%. Після синтезу зразки гідрогелів промивали в дистильованій воді (48 год) для видалення низькомолекулярних продуктів реакції та залишків мономеру. Висушені при кімнатній температурі зразки поміщали у 0,1 М розчин $AgNO_3$на 7 діб для насичення та досягнення рівноваги у гідрогелі. У насичених йонами арґентуму гідрогелях проводили фотохімічний синтез наночастинок срібла з використанням ультрафіолетового випромінювання (УФ лампа, 365 нм, 36 Вт) [15]. Перелік використаних полімерів наведено у таблиці 1.

Таблиця 1. Використані у дослідженнях зразки полімерів

Полімер	**Кількість зшиваючого агента (m/m)**		
	0,2%	***0,4%***	***0,6%***
Поліакриламід (P)	0,2P	0,4P	0,6P
Декстран–поліакриламід (DP)	0,2DP	0,4DP	0,6DP

Наночастинки срібла мають унікальні оптичні, електричні та теплові властивості. Вони ефективно поглинають та розсіюють світло, а максимуми поглинання сильно залежать від їх розмірів. Це пов'язано з синхронними коливаннями електронів провідності металу на поверхні наночастинки при їх збудженні певними довжинами хвиль. Явище носить назву плазмонного резонансу. Завдяки таким властивостям, за характеристиками спектру поглинання можливо оцінити розміри AgNPs. Максимум плазмонних коливань знаходиться в межах 390-490 нм і характеризує розміри в діапазоні 8-100 нм. Зі збільшенням розмірів відбувається зсув максимуму поглинання у довгохвильову область спектру [16, 17]. Тому, для оцінки розмірів отриманих AgNPs проводили запис оптичного поглинання отриманих наночастинок срібла у полімерних матрицях у діапазоні 300-800 нм.

Мікробіологічні дослідження

Для перевірки матеріалу на здатність інгібувати ріст бактеріальних культур, використали дикі штами *Escherichia coli* та *Staphylococcus aureus,* елективно отриманих на середовищах Ендо та жовтково-сольовому агарі.

Середовище Ендо диференціює ентеробактерій по здатності ферментувати лактозу. Склад (г/л): агар — 26,5, вітамінний препарат «ЕКД» — 1,22, лужний фуксин — 0,23, лактоза — 10,7, динатрію фосфат — 0,48, сульфіт натрію — 0,83, натрій двовуглекислий — 0,03, pH = 7,3.

Жовтково-сольовий агар — тверде поживне середовище для диференційованого вирощування стафілококів з 10% хлориду натрію. Присутність яєчного жовтка дозволяє виявити фермент лецитиназу (лецитовітелазу), яку продукують піогенні стафілококи. Склад: м'ясо-пептонний агар (МПА) — 70-75% (v/v), хлорид натрію — 10% (v/m), жовткова емульсія в 0,9% NaCl– 15-20 % (v/v), pH=7,3. Для підтвердження колоній *S. aureus* використовували метод Гінса-Буррі виявлення капсули.

Оцінку чутливості вибраних штамів мікроорганізмів проводили дискодифузійним методом на твердому середовищі згідно наказу №167 МОЗ від 5.04.2007 методичні вказівки «Визначення чутливості мікроорганізмів до антибактеріальних препаратів». Для досліджень використовували агар Мюллера-Хінтона №2 наступного складу (г/л): гідролізат казеїну — 17,5, гідролізат серця — 2, крохмаль водорозчинний (ЧДА) — 1,5, агар-агар мікробіологічний — 17, pH=7,3.

Тестові зразки гідрогелю мали однакові розміри діаметром 5 мм, аналогічно стандартним дискам з антибіотиками. Зважаючи на широке поширення антибіотикорезистентних штамів мікроорганізмів, як контроль використано антибіотики широкого спектру дії — цефазолін та цефтриаксон, а також варіанти гідрогелю 0,2P, 0,4P,0,6P насичені 20%-м розчином хлоргексидину. Насичення сухого полімеру відбувалося протягом 48 год у 20% розчині хлоргексидину. Після цього проводили тестування аналогічно зразків з AgNPs.

Вимірювання зони затримки росту здійснювали через добу за допомогою цифрового штангенциркуля Miol 15-240.

Статистичну обробку даних проводили згідно загальних статистичних алгоритмів з використанням тесту перевірки на нормальність Шапіро-Вілка ($p>0{,}05$), однофакторного аналізу ANOVA тесту Шеффе ($p<0{,}05$). Повторність досліду чотирикратна.

Дослідження in vivo

У дослідження було використано білих безпородних щурів чоловічої статі, що перебували в стандартних умовах утримання віварію ДУ «Інститут отоларингології ім. проф. О.С. Коломійченка НАМН України». Всі маніпуляції з тваринами проводили згідно з Міжнародною конвенцією роботи з тваринами та законом України «Про захист тварин від жорсткого поводження». Ділянку шкіри між лопатками очищали від шерсті та хірургічно видаляли область шкіри діаметром 7 мм. Попередньо тварин вводили в наркоз етаміналом натрію.

Контамінацію рани проводили ватним тампоном сумішшю бактерій *S. aureus* та *E. coli* з концентрацією клітин 10^5 у 1 мл. Через 10 хв після зараження, рану накривали досліджуваним матеріалом та закріплювали його. У якості контролю використовували стерильні марлеві пов'язки. Пов'язки перебували на тварині 48 год. Огляд проводили через 3 та 5 діб після операції. На першому огляді (72 год) проводили бактеріальний посів з рани на елективні середовища Ендо та жовтково-сольовий агар на присутність відповідних штамів бактерій. Повторність досліду трикратна.

Результати та обговорення

Завдяки фізико-хімічним властивостям та високому вмісту води, що наближається до такого у живих тканинах, гідрогелі мають високу біосумісність. Контроль пористості структури, складу полімерних компонентів та здатність сорбувати і утримувати різні хімічні сполуки, розширює межу застосування таких матеріалів для імітації різних тканин та лікування патологічних станів [18, 19, 20]. Лікування ран передбачає використання засобів спрямованих на попередження їх бактеріальної контамінації, створення умов регенерації тканин, серед яких достатня вологість, доступ кисню та поживних речовин [2].

Характеристика AgNPs

Згідно отриманих спектрів поглинання наночастинок срібла у полімерних матрицях, наведених у таблиці 1, не виявлено суттєвих відмінностей розмірів AgNPs (рис. 1). Положення максимуму плазмонного резонансу вказує на розподіл розмірів наночастинок срібла в межах 20-40 нм. Виходячи з цього, антибактеріальні ефекти визначатимуться в основному швидкістю дифузії AgNPs з гідрогелю та досягнення бактерицидних концентрацій Ag^{+} в оточуючому середовищі. Отже, основні терапевтичні ефекти, зумовлені AgNPs визначатимуться швидкістю їх дифузії з полімерної матриці та генерацією Ag^{+}.

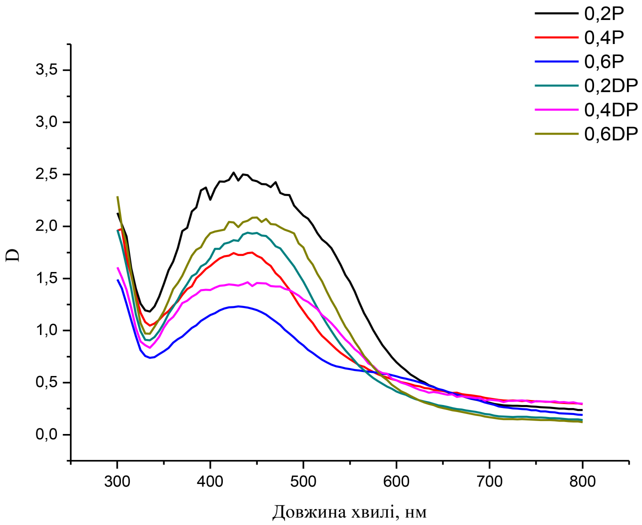

Рис. 1. Спектри поглинання наночастинок срібла, отриманих у полімерних матрицях 0,2P, 0,4P, 0,6P, 0,2DP, 0,4DP, 0,6DP

Мікробіологічні дослідження

Порівняння чутливості культур *S. aureus* та *E. coli* до застосування різних гідрогелів з наночастинками срібла проводили відносно класичного антисептика –хлоргексидину. В медицині застосовують 20% розчин хлоргексидину для знезараження поверхонь, гнійних ран та профілактики бактеріальної контамінації відкритих пошкоджень тканин.

У зв'язку з широким поширенням резистентних до антибіотиків штамів мікроорганізмів, використано стандартні диски з цефтриаксоном та цефазоліном. Результати досліджень чутливості *S. aureus* до дії хлоргексину у гідрогелі 0,2P та наночастинок срібла у матеріалах 0,2P і 0,2DP наведено на рис. 1.

Використані дикі штами мікроорганізмів *S. aureus* та *E. coli* не резистентні до дії цефазоліну та цефтриаксону. Виявлено високу чутливість *S. aureus* до 20% хлоргексидину в 0,2P з діаметром затримки росту в межах 15 мм (рис. 1А). Відносно цього показника на 32% вищу ефективність зареєстровано при застосуванні 0,2P з AgNPs та на 45% при 0,2DP (рис. 2А).

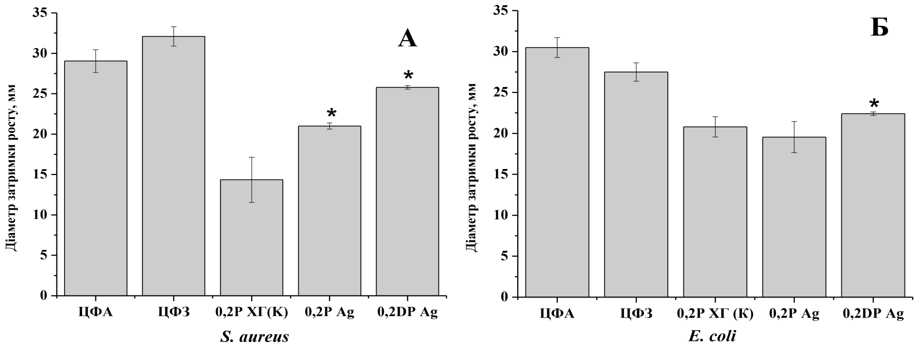

Рис. 2. Діаметр затримки росту культури *S. aureus* (А) та *E. coli* (Б) при застосуванні поліакриламіду (0,2P+Ag), кополімеру декстран-поліакриламід (0,2DP+Ag), з кількістю зшиваючого агента 0,2% (m/m), що містили наночастинки срібла. Порівняння відносно 20% розчину хлоргексидину у поліакриламідному гідрогелі (0,2P ХГ) (*$p<0{,}05$). Цефтриаксон (ЦФА) і цефазолін (ЦФЗ) — контроль антибіотикорезистентності штаму; ($n=4$).

Застосування гідрогелю 0,2P, насиченого 20% розчином хлоргексидину, відносно *E. coli* забезпечує затримку росту діаметром 18-20 мм (рис. 2Б). Відносно цих показників, не виявлено статистично достовірної різниці в ефективності застосування 0,2P з AgNPs, але гідрогель 0,2DP сприяє статистично достовірному збільшенню діаметру затримки росту на 10% (рис. 2Б).

Збільшення кількості зшиваючого агента до 0,4% не впливає на ефективність бактерицидної дії хлоргексидину відносно *S. aureus* (рис. 3А). Виявлено збільшення діаметру затримки росту на 47% при застосуванні гідрогелю 0,4P з AgNPs і на 45% — 0,4DP. Бактерицидна активність відносно *S. aureus* гідрогелів 0,4P та 0,4DP з AgNPs не відрізняється. Показник затримки росту культури *E. coli* при використанні гідрогелю 0,4P, насиченого 20% хлоргексидином, знаходиться в межах 18-19 мм (рис. 2Б). Відносно цього показника, статистично достовірне збільшення на 19% та 21% виявлено при використанні 0,4P і 0,4DP з AgNPs відповідно. Ефективність застосування цих типів гідрогелю відносно *E. coli* не відрізняється (рис. 3Б).

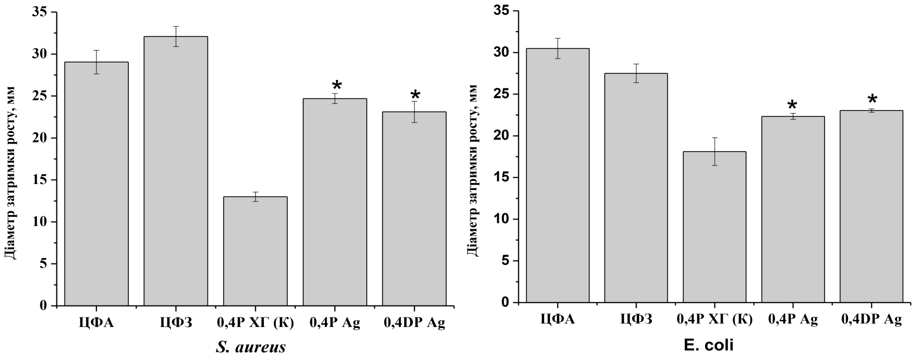

Рис. 3. Діаметр затримки росту культури *S. aureus* (А)та *E. coli* (Б) при застосуванні поліакриламіду (0,4P+Ag), кополімеру декстран-поліакриламід (0,4DP+Ag), з кількістю зшиваючого агента 0,2% (m/m), що містили наночастинки срібла. Порівняння відносно 20% розчину хлоргексидину у поліакриламідному гідрогелі (0,4P ХГ) (*$p<0,05$). Цефтриаксон (ЦФА) і цефазолін (ЦФЗ) — контроль антибіотикорезистентності штаму; (n=4).

Не виявлено зміни чутливості *S. aureus* до застосування гідрогелю 0,6P з 20% хлоргексидином відносно аналогічних показників для гідрогелів 0,2P та 0,4P (рис. 4А). Статистично достовірне зростання показника на 36% та 44% виявлено при використанні 0,6P і 0,6DP з AgNPs відповідно. Отримані значення не відрізняються від аналогічних показників при використанні зразків гідрогелю з кількістю зшиваючого агента 0,4%.

Отримані результати бактерицидної активності матеріалів, які містили наночастинки срібла, вказують на їх ефективність відносно грам-позитивних (*S. aureus*) та грам-негативних (*E. coli*) мікроорганізмів. Серед переліку досліджених матеріалів, найвищу ефективність виявлено для гідрогелів 0,4P та 0,4DP. Причому ефективність дії на золотистий стафілокок значно вища відносно стандартної речовини — хлоргексидину, та наближається до такої використаних антибіотиків широкого спектру — цефтриаксону та цефазоліну. Отримана різниця ефективності застосування матеріалів із наночастинками срібла відносно грампозитивних та грамнегативних мікроорганізмів, можливо, пов'язана з особливостями структури клітинної стінки, яка містить додаткову мембрану та тонкий шар пептидоглікану (Li, та ін. 2018). Матеріали з кількістю зшиваючого агенту 0,2% мають найнижчу бактерицидну активність відносно *S. aureus* та *E. coli*. Середній ступінь зшивки (0,4%) сприяє росту ефективності, що можливо пов'язано зі зменшенням середніх розмірів утворених наночастинок срібла (Nadtoka, Kutsevol та Naumenko, та ін. 2019). Подальший ріст щільності матеріалу (0,6%) не змінює бактерицидної активності. Варто відмітити збереження балансу між розмірами AgNPs та швидкістю їх дифузії з матеріалу. При збільшенні щільності матеріалу відбувається зниження швидкості виходу наночастинок та Ag^{+} з матеріалу. Отже, серед переліку досліджених матеріалів з наночастинками срібла оптимальними за цими параметрами виявились гідрогелі 0,4P та 0,4DP.

Використання гідрогелю 0,6P з 20% хлоргексидином сприяє затримці росту *E. coli* на площі діаметром 18-20 мм (рис. 4Б). Відносно цього показника виявлено збільшення діаметра на 15% при застосуванні 0,6P з AgNPs

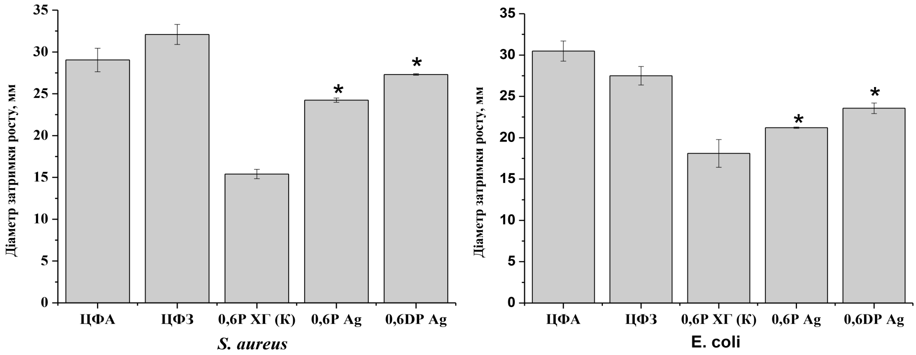

Рис. 4. Діаметр затримки росту культури *S. aureus* (А)та *E. coli* (Б) при застосуванні поліакриламіду (0,6P+Ag), кополімеру декстран-поліакриламід (0,6DP+Ag), з кількістю зшиваючого агента 0,2% (m/m), що містили наночастинки срібла. Порівняння відносно 20% розчину хлоргексидину у поліакриламідному гідрогелі (0,6P ХГ) (*p<0,05).Цефтриаксон (ЦФА) і цефазолін (ЦФЗ) — контроль антибіотикорезистентності штаму; (n=4).

та на 23% для 0,6DP. Статистично достовірної різниці між показниками не виявлено, хоча зберігається тенденція до росту бактерицидної активності при застосуванні гідрогелю 0,6DP з AgNPs.

Таким чином, варіанти гідрогелю 0,4P та 0,4DP з AgNPs володіють вищою ефективністю відносно інших зразків та класичного антисептичного засобу — хлоргексидину.

Дослідження in vivo

Згідно результатів впливу на дикі штами *S. aureus* та *E. coli*, ми використали у дослідженнях *in vivo* гідрогелі 0,4P та 0,4DP з наночастинками срібла. Контролем виступали стерильні малеві пов'язки та гідрогелі 0,4P, 0,4DP без AgNPs.

Враховуючи ідентичні початкові умови, за винятком тварин, рани яких не піддавалися бактеріальному зараженню, через 3 доби виявлено відмінності процесу загоєння.

У тварин без зараження з відкритою раною, лікування яких передбачало використання класичного марлевого матеріалу, на 3 добу не виявлено ознак запалення та контамінації, розмір рани зменшився на чверть. Через 5 діб пошкодження зменшилося вдвічі (рис. 5). Бактеріальний посів на 72 год виявив 52 колонії *Staphylococcus sp.* (найбільш ймовірно *S. epidermisis*) при відсутності *S. aureus* та *E.coli.*

У щурів з відкритими ранами, штучним зараженням та застосуванням класичного методу лікування, на третю добу не виявлено зміни розмірів пошкодження. Посіви на елективні середовища не виявили присутності *E.coli,* але зареєстровано понад 200 колоній *Staphylococcus sp* та *S. aureus.* Через 5 діб розмір рани зменшився вдвічі.

Використання 0,4P та 0,4DP без лікарських засобів при лікуванні відкритої, штучно інфікованої рани, сприяє початку її загоєння на 3 добу з відсутніми візуальними ознаками запалення та збереженням початкових розмірів. Мікробіологічні дослідження виявили 80 колонії *Staphylococcus* *sp*, 3 *S. aureus* та 2 лактозопозитивні колонії. Через 5 діб розміри рани зменшилися вдвічі.

Застосування 0,4DP з наночастинками срібла на третю добу сприяє зменшенню розмірів рани у 2 рази від початкового без ознак запалення. Через 5 діб розміри рани зменшилися у 3 рази (рис. 5). На місці локалізації матеріалу присутні залишки арґентум оксиду у вигляді чорних або коричневих плям. Мікробіологічні дослідження через 72 год виявили близько 40 колоній *Staphylococcus sp.* та відсутність лактозопозитивних бактерій. Схожі результати отримано при застосуванні 0,4P з наночастинками срібла.

Рис. 5. Процес загоєння штучно інфікованої рани у щурів за умови її лікування марлевим матеріалом (контроль), гідрогелем (0,4DP) та гідрогелем з наночастинками срібла (0,4DP+AgNPs)

Отже, гідрогелі 0,4P та 0,4DP з AgNPs перешкоджають розвитку патогенної мікрофлори у відкритих ранах та сприяють швидкому їх загоєнню. Насамперед це визначається високим вмістом води у матеріалі, його щільністю, що не дозволяє проникати мікроорганізмам. Додаткова бактерицидна активність, яка забезпечується присутністю наночастинок срібла, підтримує стерильні умови.

Дослідження матеріалів в умовах *in vivo*, проведених на відкритих ранах із штучною бактеріальною контамінацією, виявили прискорення процесу загоєння при використанні поліакриламідного гідрогелю з AgNPs. Хоча відсутні ознаки значного бактеріального зараження у контрольних тварин, у них виявлена присутність патогенних представників мікрофлори (*S. aureus*) на третю добу, які викликають запалення, розвиток гнійних виразок та сепсис. Присутність інших видів роду *Staphylococcus*, найімовірніше *S. epidermisis*, пов'язано з їх конститутивною присутністю як нормальної мікрофлори поверхні шкіри [21]. Зазвичай він не викликає запальних процесів та сепсису, що характерно *S. aureus.* Відсутність антибактеріальних агентів не дозволяє дослідженим матеріалам 0,4P та 0,4DP підтримувати низьку кількість бактерій у рані. Через 72 год виявлено значну присутність у рані представників роду *Staphylococcus*, в тому числі *S. aureus* та лактозопозитивні колоній групи ентеробактерій. Джерелом останніх слугує підстилка тварин, яка контактувала з раною. Застосування 0,4P та 0,4DP з AgNPs дозволяє знизити наслідки штучного зараження рани, на що вказує зменшення кількості бактерій на поверхні рани, відсутність *S. aureus* та ентеробактерій, в тому числі *E. coli*. Враховуючи виявлену кількість колоній різних видів бактерій у відкритих ранах, при лікуванні яких застосовували класичні методи і гідрогелі без AgNPs, ми припускаємо, що підтримка бактерицидних та бактеріостатичних умов у рані забезпечується завдяки присутності іонів срібла, які дифундували в рану з гідрогелю (0,4P, 0,4DP+AgNPs).

Висновки

Аналіз спектрів поглинання AgNPs у гідрогелях поліакриламід та декстан-поліакриламід з кількістю зшиваючого агента 0,2, 0,4, 0,6 %, свідчить про те, що умови формування в них наночастинок срібла майже однакові і їх діаметр знаходиться в межах 20-40 нм. Гідрогелі 0,4P та 0,4DP з AgNPs виявляють вищу бактерицидну активність відносно *S. aureus* та *E.coli* порівняно з іншими зразками гідрогелю та класичним антисептиком — хлоргексидином. Використання цих гідрогелів для лікування відкритих ран, які заражені *S. aureus* та *E. coli*, дозволяє прискорити процес загоєння та підтримує антисептичні умови протягом певного часу.

Отже, серед переліку перевірених гідрогелів, найбільш доцільно з метою лікування відкритих ран, використовувати поліакриламід та кополімер декстран-поліакриламід з кількістю зшиваючого агента 0,4% (m/m), які містять наночастинки срібла з середнім діаметром 20-40 нм, що пов'язано з їх високою ефективністю відносно грам-позитивних та грам-негативних мікроорганізмів, підтримці бактерицидних і бактеріостатичних умов, оптимальних для загоєння відкритих ран.

Подяки

Висловлюємо вдячність завідувачу відділу біофізики ДУ «Інститут отоларингології ім. проф. О.С. Коломійченка НАМН України» Карасю А.Ф. за допомогу у проведенні досліджень *in vivo* та надане необхідне обладнання.

Література

1) Zheng, Y., et al. 2017. Injectable Hydrogel-Microsphere Construct with Sequential Degradation for Locally Synergistic Chemotherapy. *ACS applied materials & interfaces* 4, 9 : 3487–3496. http://doi.org/10.1021/acsami.6b15245
2) Zhou, H., et al. 2017. The progress and challenges for dermal regeneration in tissue engineering. *Journal of biomedical materials research. Part A* 105, 4 : 1208-1218. https://doi.org/10.1002/jbm.a.35996
3) Li, S., et al. 2018. Antibacterial Hydrogels. *Advanced science (Weinheim, Baden-Wu?rttemberg, Germany)* 5, 5 : 1700527. https://doi.org/10.1002/advs.201700527
4) Boehle, K.E., et al. 2017. Utilizing Paper-Based Devices for Antimicrobial-Resistant Bacteria Detection. *Angewandte Chemie (International ed. in*

English) 56, 24 : 6886–6890. https://doi.org/10.1002/anie.201702776

5) Zipperer, A., et al. 2016. Human commensals producing a novel antibiotic impair pathogen colonization. *Nature* 7613, 535 : 511–516. https://doi.org/10.1038/nature18634
6) Molton, J.S., P.A. Tambyah, B.S. Ang, M.L. Ling, and D.A. Fisher. 2013. The global spread of healthcare-associated multidrug-resistant bacteria: a perspective from Asia. *Clinical infectious diseases: an official publication of the Infectious Diseases Society of America* 9, 56 : 310–1318. https://doi.org/10.1093/cid/cit020
7) van Hoek, A.H., D. Mevius, B. Guerra, P. Mullany, A.P. Roberts, and H.J. Aarts. 2011. Acquired antibiotic resistance genes: an overview. *Frontiers in microbiology* 2 : 203. https://doi.org/10.3389/fmicb.2011.00203
8) Naas, T., et al. 2017. Beta-lactamase database (BLDB) — structure and function. *Journal of enzyme inhibition and medicinal chemistry* 32, 1 : 917–919. https://doi.org/10.1080/14756366.2017.1344235
9) Liao, C., Y. Li, and S.C. Tjong. 2019. Bactericidal and Cytotoxic Properties of Silver Nanoparticles. *International journal of molecular sciences* 20, 2 : 449. https://doi.org/10.3390/ijms20020449
10) Xiu, Z.-M., J. Ma, and P.J.J. bAlvarez. 2011. Differential Effect of Common Ligands and Molecular Oxygen on Antimicrobial Activity of Silver Nanoparticles versus Silver Ions. *Environmental Science & Technology* 45 : 9003–9008. https://doi.org/10.1021/es201918f
11) Knetsch, M.L.W., and L.H. Koole. 2011. New strategies in the development of antimicrobial coatings: the example of increasing usage of silver and silver nanoparticles. *Polymers.* 3, 1 : 340–366. https://doi.org/10.3390/polym3010340
12) Stojkovska, J., D. Kostić, Ž. Jovanović, M. Vukašinović-Sekulić, V. Mišković-Stanković, and B. Obradović. 2014. A comprehensive approach to in vitro functional evaluation of Ag/alginate nanocomposite hydrogels. *Carbohydrate Polymers* 111 : 305–314. https://doi.org/10.1016/j.carbpol.2014.04.063
13) Tang, H., A. Lu, L. Li, W. Zhou, Z. Xie, and L. Zhang. 2013. Highly antibacterial materials constructed from silver molybdate nanoparticles immobilized in chitin matrix. *Chemical Engineering Journal* 234 : 124–131. https://doi.org/10.2147/IJN.S154748
14) Nadtoka, O., N. Kutsevol, V. Krysa, and B. Krysa. 2018. Hybrid polyacryamide hydrogels: Synthesis, properties and prospects of application. *Molecular Crystals and Liquid Crystals* 672, 1 : 1–10.
15) Nadtoka, O., N. Kutsevol, A. Naumenko, and P. Virych. 2019. Photochemical synthesis and characterization of hydrogel-silver nanoparticle composites. *Research on Chemical Intermediates*, 1–12.
16) Deen, G.R., and V. Chua. 2015. Synthesis and Properties of New “Stimuli” Responsive Nanocomposite Hydrogels Containing Silver Nanoparticles. *Gels* 1, 1 : 117–134.
17) Bulavin, L., N. Kutsevol, V. Chumachenko, D. Soloviov, A. Kuklin, and A. Marynin. 2016. SAXS Combined with UV-vis Spectroscopy and QELS:

Accurate Characterization of Silver Sols Synthesized in Polymer Matrices. *Matrices. Nanoscale research letters* 11, 1 : 35.

18) Naahidi, S., et al. 2017. Biocompatibility of hydrogel-based scaffolds for tissue engineering applications. *Biotechnology advances* 35, 5 : 530–544. https://doi.org/10.1016/j.biotechadv.2017.05.006

19) Annabi, N., et al. 2017. Engineering a sprayable and elastic hydrogel adhesive with antimicrobial properties for wound healing. *Biomaterials* 139 : 229–243. https://doi.org/10.1016/j.biomaterials.2017.05.011

20) Li, T., et al. 2019. Silk fibroin/carboxymethyl chitosan hydrogel with tunable biomechanical properties has application potential as cartilage scaffold. *International journal of biological macromolecules* 137 : 382–391. https://doi.org/10.1016/j.ijbiomac.2019.06.245

21) Dréno, B., et al. 2016. Microbiome in healthy skin, update for dermatologists. *Journal of the European Academy of Dermatology and Venereology: JEADV* 30, 12 : 2038–2047. https://doi.org/10.1111/jdv.13965

Ринок як складна система

Market as a complex system

Interdisciplinary Studies of Complex Systems
No. 16 (2020) 63–71

https://doi.org/10.31392/iscs.2020.16.063

Цифрові технології маркетингових комунікацій у стратегіях малого підприємства

Зоя Каїра[1], *Олександр Ващенко*[2,3], *Ольга Ващенко*[2,4]

Переднє слово від редакції. Аналіз сучасного ринку вказує на єдиний комплекс взаємопов'язних аспектів, що включає в себе питання психології, економіки, фінансової аналітики, сучасних цифрових технологій тощо. Питання психології лежать в основі дослідження маркетингу і реклами, економічні стратегії у конкретних країнах залежать від рівня розвитку ринку та стану національної економіки, співвідношення світових валют та використання нових валют, таких, наприклад, як криптовалюта. Blockchain-технології призводять до змін у політиці маркетингу. Стратегії розвитку бізнесу широко використовують математичні моделі і розрахунки. Розвиток цифрових технологій дозволяє економити час на купівлю товарів та послуг, знайомить з новими можливостями та допомагає у стратегіях малих підприємств (МП). З іншого боку, цифрові технології можуть сприяти створенню «суспільства споживання» та «шопінгоманії», що вже є питаннями соціокультури, філософії розвитку суспільства і, знову ж таки, психології.

Розгляд у комплексі навіть частини вищеперерахованих аспектів сучасного ринку дозволить знайти нові грані у розумінні такої широкої теми як «Цифрові технології маркетингових комунікацій у стратегіях МП».

Анотація. Встановлено, що конкурентоспроможність малого підприємства (МП) залежить від використання ефективних маркетингових комунікаційних стратегій. Показано, що успішний розвиток і адміністрування маркетингових комунікацій вимагають слушних цифрових навичок і зусиль для розробки стратегії МП. Автори інтегрують особливості сучасних тенденцій в стратегії цифрових маркетингових комунікацій малого бізнесу. Поширено аналіз фінансової беззбитковості для процесу управління витратами на маркетингові комунікації. Такий підхід дозволяє вдосконалити стратегії цифрових маркетингових комунікацій МП для успішної роботи на конкурентному ринку.

Ключові слова: цифрові технології, маркетинг, стратегія, мале підприємство, витрати, аналіз беззбитковості, прибуток

[1] Донбаська державна машинобудівна академія, Краматорськ, Україна. zoya.kayira@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-9976-7388
[2] Державний університет телекомунікацій, Київ, Україна.
[3] o.vaschenko@dut.edu.ua, https://orcid.org/0000-0003-2830-0227
[4] olgavash777@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-2130-261X

Digital technologies of marketing communicationsin small enterprise strategies

Zoia Kaira, Oleksandr Vaschenko, Olga Vaschenko

Abstract. It is established that SME's competitiveness depends on using effective marketing communication strategies. It is shown that successful development and administration of marketing communications requires appropriate digital skills and efforts to develop SME strategy. The authors integrate the features of current trends into SME marketing communication strategies. The financial break-even analysis is extended for the process of cost managing for marketing communications. This approach allows improvement using digital marketing communications by small businesses for successful operation in a competitive market.

Keywords: digital technology, marketing, strategy, small business, costs, break-even point, profit

Вступ

Цифровий маркетинг є сучасним інструментом, що забезпечує важливі комунікації малого бізнесу з цільовими ринками. Великі обсяги робіт, необхідні для забезпечення цифрових технологій маркетингових комунікацій, дорогі та трудомісткі для використання підприємствами малого бізнесу. Проте, коли МП цілеспрямовано делегують завдання цифрового маркетингу та наймають персонал для конкретних цифрових службових обов'язків, вони стають спроможними максимально використовувати невеликий бюджет і власну команду. Популярними методами для започаткування бізнесу є веб-сайти компаній і присутність у соціальних мережах, проте, електронний маркетинг і контент-маркетинг також надають недорогі можливості для спілкування зі споживачами.

Цифровий маркетинг є засобом для МП створити власний бренд, проте, майбутні тенденції змінюватимуть стратегії маркетингових комунікацій щодо досягнення малим бізнесом цільових сегментів [1]. Дієвість цифрового маркетингу збільшується у комунікаціях зі споживачами, коли реальні історії і технології використовуються підприємством по-різному, у порівнянні з конкурентами. Основними завданнями, що лежать у підґрунті маркетингових комунікацій, є розробка і поширення маркетингових повідомлень, зв'язки з громадськістю і реклама, при цьому кінцевою метою програми маркетингових комунікацій є створення позитивного відгуку споживачів, формування ринку і продаж продукту в межах визначеного цінового діапазону.

Маркетингові комунікації залучають широке коло фахівців, при цьому засоби комунікацій можуть включати плакати, банери та веб-сайти, рекламні щити, прес-релізи, газетні, журнальні і телевізійні оголошення, брендинг зображень і спонсорство подій. Маркетингові стратегії мають організувати ефектні виступи, привернути увагу громадськості та засобів масової інформації. Маркетингові комунікації фактично починаються на стратегічному рівні з формулювання місії (англ. mission) і бачення (англ. vision) підприємства, які визначають цілі, стратегії компанії та її комплексу маркетингу. Як відзначалося, цифровий маркетинг надає МП можливість диференціюватися в конкуренції, при цьому важливо впроваджувати контроль витрат малого бізнесу на маркетингові комунікації.

Метою статті є аналіз сучасних тенденцій застосування цифрових технологій маркетингових комунікацій малого підприємства і формування пропозицій щодо управління маркетинговими витратами малого бізнесу.

Виклад основного матеріалу

Інноваційна маркетингова комунікаційна стратегія може допомогти малому бізнесу відрізнити компанію від інших учасників ринку і забезпечити унікальну конкурентну перевагу. Висока здатність МП ідентифікуватися, підтримувати і будувати стратегічні зв'язки з цільовими сегментами ринку для взаємно корисних обмінів є основою успіху підприємства в умовах глобалізації економічної діяльності [2]. У довгостроковій перспективі успіх МП залежить від його здатності ефективно спілкуватися зі споживачами протягом усього періоду перебування у бізнесі [3]. Важливість створення і підтримування сталих відносин у конкурентних умовах породила фундаментальний зсув організаційної стратегії і парадигми маркетингу, що дали нове визначення процесу обміну [4].

Впровадження ефективної стратегії маркетингових комунікацій призначене відстежувати зміни у тому, як споживачі проводять вільний час, і здійснювати відповідні коригування у маркетингових планах і програмах щодо комунікацій зі споживачами [5]. Слушне управління малим бізнесом потребує максимальних кінцевих результатів із можливими найменшими витратами, і це правило найбільшою мірою відповідає сфері маркетингу, оскільки МП має відрізнятися від власного конкурента, навіть за умов обмеженості ресурсів. Цифровий маркетинг виявляє певні тенденції, і деякі з них в кінцевому підсумку стають дієвими чинниками впливу [6]. Причина цього полягає в тому, що більшість тенденцій цифрового маркетингу виникають як реакції на нові технології або нову поведінку споживачів, тобто вони заповнюють потреби, які почали з'являтися. Сьогодні мобільний маркетинг став важливим знаряддям цифрового маркетолога, тому необхідно дослідити основні тенденції цифрового маркетингу, які відбуваються в середовищі малого бізнесу.

Нові цифрові ресурси для комунікацій малого підприємства

Електронний маркетинг є однією з кращих комунікаційних стратегій для малого бізнесу. Використання малими підприємствами великої кількості нових технологій реалізують нові можливості для створення і утримання плідних зв'язків з існуючими і майбутніми споживачами. Проте, за сучасних умов цифровізації, ключовим чинником успіху є знання платформ і технологій, які представляють найкращі можливості для бізнесу і цільових сегментів МП. Останніми роками відзначено ряд тенденцій, потенційно корисних для малого підприємства, зокрема, Twitter, YouTube, Google+ та Email [6]. Так, Twitter — це соціальна мережа, де можна розміщувати пропозиції, рекламні акції та оголошення для існуючих та потенційних споживачів, проте успішне використання Twitter потребує поєднання інформації про компанію, цікавих посилань, особистих інтересів і рекламних акцій компанії. На каналі YouTube можна розміщувати відеоролики, які розважають, а також просувають послуги підприємства, в результаті відео може сприяти залученню нових клієнтів. Канал Google+ може створити конкурентну перевагу щодо комунікаційних заходів МП. Електронна пошта Email існуючих і потенційних клієнтів може бути ефективним знаряддям, зважаючи на спосіб використання електронної пошти. Оскільки електронні листи можна відстежувати, електронний маркетинг дозволяє оцінити ефективність повідомлень, адаптувати їх для поточних та нових клієнтів.

Маркетинг у соціальних мережах

Соціальні медіа є надзвичайно важливим маркетинговим інструментом для цифрових маркетологів, зважаючи на те, що цільова аудиторія і майбутні клієнти проводять багато часу в цих мережах. У всьому світі користувачі соціальних мереж проводять в середньому 135 хвилин на день в соціальних мережах, і кількість часу зростає з кожним роком [6]. Більше того, люди все більше використовують соціальні мережі для вивчення нових продуктів і послуг, вивчення певних брендів, що допомагає приймати остаточне рішення щодо купівлі товару чи послуги. МП має встановлювати зв'язок зі своєю аудиторією в соціальних мережах і забезпечувати власну конкурентну перевагу. Зокрема, засоби використання малими підприємствами маркетингу в соціальних мережах для стимулювання існуючих клієнтів і залучення нових споживачів містять обмін цікавим і актуальним контентом; залучення аудиторії до розмови; використання соціальних мереж для обслуговування клієнтів, включаючи відповіді на питання і розгляд скарг; використання реклами в соціальних мережах для охоплення нових аудиторій; забезпечення лояльності до бренду шляхом залучення, коментування та обміну інформацією; співпраця з впливовими особами для виходу на нові ринки і підвищення довіри; аналіз даних для кращого розуміння потреб і поведінки існуючих і потенційних клієнтів; зв'язок з аудиторією на більш особистому рівні і побудова відносин.

Стратегія голосової комунікації є однією з найпростіших і поширених форм людської взаємодії, тому МП може використовувати голос у взаємодії з технологіями маркетингових комунікацій. Насправді, створення стратегії голосового пошуку стає головним пріоритетом для малого бізнесу.

Контент-маркетинг — це дисципліна цифрового маркетингу, яка використовує контент для залучення, створення зв'язків і утримання клієнтів. Кращий підхід до контент-маркетингу — це інтеграція локальних і зовнішніх контентних стратегій у загальну цифрову ініціативу підприємства. Одним із найважливіших елементів комплексної голосової стратегії є оптимізація контенту за допомогою типів ключових слів, які зазвичай з'являються в голосовому пошуку, зокрема, в форматах команд і питань. Ключові слова також відповідають на типи питань клієнтів. Наприклад, зростаюча тенденція — це інтерактивний контент, який дозволяє членам аудиторії активно взаємодіяти з брендами. Гармонізація цифрових технологій з фізичною реальністю означає, що цифрові технології можуть бути знаряддям сьогодення і майбутнього, але маркетингові дослідження поведінки споживачів доводять, що люди не схильні повністю відмовлятися від традиційних покупок в магазині, тому компанії почали адаптувати цифрові технології, що дозволяють взаємодіяти зі споживачами, які фізично присутні в пунктах продажу [7].

Цікаво дослідити американський досвід щодо інвестицій МП у цифровий маркетинг. Дослідження вказують, що багато МП вкладають невеликі інвестиції у цифровий маркетинг, зокрема, на соціальні мережі, веб-сайт і Email маркетинг [7]. У 2017 р. майже половина американських МП витратили 10 тис. дол. або менше на цифровий маркетинг [7]. Тільки чверть американських МП витратили 10,01–100 тис. дол. на цифровий маркетинг, а 13% підприємств витратили понад 500 тис. дол. [7]. Ймовірно, це пов'язано з тим, що більшість МП дуже малі, з кількістю працюючих менше 10 осіб. Ці підприємства приносять невеликий дохід і тому мають обмежені ресурси на маркетингові витрати. Проте, незважаючи на невеликі бюджети, більшість МП (62%) впроваджують технології цифрового маркетингу і здійснюють свої продажи через веб-сайти та соціальні мережі [7]. Визнаним каналом маркетингової комунікації є електронний маркетинг, який використовують 39% американських МП. Популярність цих каналів маркетингової комунікації, а також обговорення контент-маркетингу показують, що МП зацікавлені у використанні цифрового маркетингу. Багато компаній усвідомлюють це, тому більшість МП планують збільшення інвестицій на розробку своїх веб-сайтів і комунікацію в соціальних мережах. Проте, МП не завжди оптимізують свої ресурси в операціях впровадження технологій цифрового маркетингу.

Слід відзначити, що сьогодні в наявності є багато інструментів, необхідних для реалізації інноваційних стратегій маркетингових комунікацій, які надаються практично безкоштовно [8]. Інтернет-маркетинг не повинен бути дорогим для малого бізнесу, мале підприємство не має достатнього бюджету, щоб охопити споживачів через телевізійну рекламу. Проте, необхідність конкурувати в онлайн-сфері вимагає проведення опитувань на тему уподобань та звичок клієнтів у соціальних мережах в обмін на цінову знижку на продукт для цільового сегменту підприємства. МП має створити сторінку компанії для спілкування з клієнтами на Facebook; укласти угоду на рекламу з одним із сайтів групових цінових знижок на продукти компанії. За оцінками, компанія Lexus витрачає на цифрові і нові технології 50% маркетингового бюджету бренду [9]. Дослідження Digital Marketing Institute вказують, що компанії витрачають близько 40% рекламного бюджету на створення з'вязків із новими клієнтами, і 60% — на утримання існуючих споживачів як ретаргетінг, зважаючи на високу вартість замовлення і зацікавленість в розвитку існуючих відносин через цінний контент і соціальне обслуговування клієнтів [9]. Технологіїї AR/VR (доповнена і віртуальна реальність) є найменш поширеними формами цифрового маркетингу малого бізнесу, але вони можуть бути дуже ефективними для деяких МП [10].

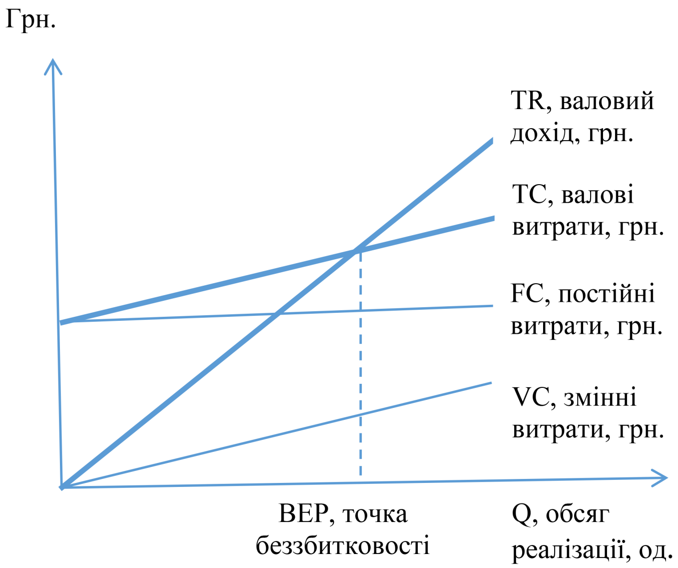

Рис. 1. Точка беззбитковості підприємства

Контроль витрат на маркетингові комунікації

За оцінками, у 2020 р. витрати США на цифрову рекламу досягнуть 113,18 млрд. дол., що вдвічі більше, ніж 2 роки тому [11]. МП повинно оцінювати ефективність власної стратегії маркетингової комунікації на основі аналітичних методів для виявлення проблем контролю витрат на реалізацію маркетингової кампанії. Підприємство малого бізнесу є обмеженим у фінансових ресурсах, тому необхідним є постійний контроль витрат на маркетингові комунікації. Для здійснення контролю за витратами (визначення ефективності запланованої рекламної маркетингової кампанії) корисним є фінансовий аналіз беззбитковості — розрахунок точки нульової ефективності рекламної кампанії (рис. 1) [12].

Постійні витрати не залежать від величини обсягу виробництва чи кількості продажу і включають такі фактори, як сплата відсотків, оплата оренди, погашення платежів. Витрати, спрямовані на реалізацію запланованої кампанії маркетингових комунікацій, також відносять до постійних витрат.

Маркетинговий менеджер повинен визначити точку нульової ефективності реклами, що представляє ту кількість продукту, яка забезпечуватиме беззбитковість виробництва або продажу продукту, коли валовий дохід дорівнює валовим витратам. Точка беззбитковості розраховується діленням постійних витрат (FC) на величину покриття, яка визначається як різниця між продажною ціною за одиницю (SP) і змінними витратами на одиницю (AVC). Точку нульової ефективності реклами для компенсації витрат на маркетингові комунікації у натуральному вимірюванні можна визначити математично за наступною формулою:

$$\mathrm{BEP} = \frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{SP} - \mathrm{AVC}}, \text{ од.}, \qquad (1)$$

де BEP (англ. Break-Even Point) — точка нульової ефективності рекламної кампанії малого підприємства, од.;
FC — витрати на маркетингові комунікації, грн.;
SP — продажна ціна одиниці продукту, грн./од.
AVC — змінні витрати на одиницю продукції, грн./од.

У грошовому вимірюванні оцінку точки нульової ефективності маркетингової кампанії можна розрахувати за наступною формулою:

$$\mathrm{BEP} = \frac{\mathrm{FC}}{1 - \dfrac{\mathrm{AVC}}{\mathrm{SP}}}, \text{ грн.} \tag{2}$$

Точка нульової ефективності реклами вказує, на яку величину повинен зрости обсяг збуту товару (у натуральних або грошових одиницях виміру) при незмінній ціні реалізації, щоб підприємство було спроможним відшкодувати додаткові витрати на рекламну кампанію комунікації зі споживачами.

Після кількісного визначення точки нульової ефективності маркетингової кампанії, МП повинно з'ясувати, наскільки імовірне зростання обсягу реалізації товару при збільшенні витрат на рекламу, та визначити реальні можливості відшкодування фінансових витрат на імплементацію заходів запланованої стратегії маркетингових комунікацій.

Висновки

Цифровий маркетинг впливає на ринковий успіх МП і динамічно розвивається завдяки швидким змінам технологій та уподобань споживачів. Маркетинг у соціальних мережах є одним з найпотужніших маркетингових інструментів для малого бізнесу. Створення профілю в соціальних мережах є важливим для МП, при цьому необхідно підтримувати присутність на платформі і взаємодіяти з аудиторією. Електронний маркетинг є однією з кращих комунікаційних стратегій для малого бізнесу, від виховання до лідерства в управлінні взаємовідносинами з клієнтами. Контент-маркетинг містить усю інформацію про клієнта і його потреби. Кращий підхід до контентного маркетингу надає інтеграція локальних і зовнішніх контентних стратегій у загальну цифрову ініціативу МП. Успішний корпоративний і персональний брендинг суттєво впливають на лольність клієнтів. Вдале засвоєння та використання МП тенденцій розвитку цифрового маркетингу є ключовим чинником ринкового успіху, що залежить від впровадження досягнень стратегічної еволюції соціальних мереж, контенту і характеру взаємодії бізнесу зі своїми клієнтами, як у віртуальній реальності, так і в фізичному світі. Успішне управління підприємством вимагає від менеджменту фінансового аналізу витрат на програми маркетингової комунікації МП.

Література

1) Akshata Chandrasekhar. 2018. Digital Marketing strategies for Small Businesses to Follow. February 21. https://www.marketmotive.comblog/online-marketing/digital-marketing-strategies-small-businesses-article
2) Palmer, R., Lindgreen, A., & Vanhamme, J. 2005. Relationship marketing: schools of thought and future research directions. Marketing Intelligence & Planning, 23(3), 313–330. https://core.ac.uk/download/pdf/80779229.pdf
3) Mohr, J. and Nevin, J. 1990. Communication Strategies in Marketing Channels: A Theoretical Perspective. Journal of Marketing, 54, 36-51. http://dx.doi.org/10.2307/1251758
4) Palmer, R., Lindgreen, A., & Vanhamme, J. 2005. Relationship marketing: schools of thought and future research directions. Marketing Intelligence & Planning, 23(3), 313–330. https://core.ac.uk/download/pdf/80779229.pdf
5) Colleen Reinhart How to Develop a Digital World Marketing Communication Strategy. https://smallbusiness.chron.com/develop-digital-world-marketing-communication-strategy-14266.html
6) Digital Marketing Trends for Small Business. https://digitalmarketing institute.com/blog/5-digital-marketing-trends-for-small-business
7) Elizabeth Ballou, How Small Businesses Invest in Digital Marketing in 2018. https://clutch.co/agencies/digital/resources/small-business-digital-marketing-survey-2018
8) Bryan Berg, Innovative Marketing Communication Strategy. https://small business.chron.com/innovative-marketing-communication-strategy-14350.html
9) Frazier Mya 2011. Traditional v. Digital: What The Media Spend of Three Brands Says About the Future of Advertising. Forbes. April 2011. https://www.forbes.com/sites/myafrazier/2011/04/07/traditional-v-digital-what-the-media-spend-of-three-brands-says-about-the-future-of-advertising#55c0347052ac
10) Глоба М. С., Наконечна В. О., Охріменко К. І. 2017. Використання технологій VR та AR в маркетингу на ринках будівництва, проектування та дизайну. *Маркетинг і контролінг: сучасні виклики підприємництв.* Київ. 170-173. http://elar.nung.edu.ua/bitstream/123456789/6150/1/6727p.pdf
11) Digital Marketing Trends to Watch Out For in 2018. URL: https://digitalmarketinginstitute.com/blog/30-08-17-6-digital-marketing-trends-to-watch-out-for-in-2018
12) Vorst I., Reventlow P. 2005. Economy firms. M.: Higher School. 460 p.

References

1) Akshata Chandrasekhar. 2018. Digital Marketing strategies for Small Businesses to Follow. February 21. https://www.marketmotive.com/blog/online-marketing/digital-marketing-strategies-small-businesses-article
2) Palmer, R., Lindgreen, A., & Vanhamme, J. 2005. Relationship marketing: schools of thought and future research directions. Marketing Intelligence & Planning, 23(3), 313–330. https://core.ac.uk/download/pdf/80779229.pdf
3) Mohr, J. and Nevin, J. 1990. Communication Strategies in Marketing Channels: A Theoretical Perspective. Journal of Marketing, 54, 36–51. http://dx.doi.org/10.2307/1251758
4) Palmer, R., Lindgreen, A., & Vanhamme, J. 2005. Relationship marketing: schools of thought and future research directions. Marketing Intelligence & Planning, 23(3), 313–330. https://core.ac.uk/download/pdf/80779229.pdf
5) Colleen Reinhart How to Develop a Digital World Marketing Communication Strategy. Retrieved from: https://smallbusiness.chron.com/develop-digital-world-marketing-communication-strategy-14266.html
6) Digital Marketing Trends for Small Business. https://digitalmarketing institute.com/blog/5-digital-marketing-trends-for-small-business
7) Elizabeth Ballou, How Small Businesses Invest in Digital Marketing in 2018. https://clutch.co/agencies/digital/resources/small-business-digital-marketing-survey-2018
8) Bryan Berg, Innovative Marketing Communication Strategy. https://small business.chron.com/innovative-marketing-communication-strategy-14350.html
9) Frazier Mya. 2011. Traditional v. Digital: What The Media Spend of Three Brands Says About the Future of Advertising; Forbes; April 2011. https://www.forbes.com/sites/myafrazier/2011/04/07/traditional-v-digital-what-the-media-spend-of-three-brands-says-about-the-future-of-advertising/#55c0347052ac
10) Globa M.S., Nakonechna V.O., Ohrimenko K.I. 2017. Vykorystannya tegnologiy VR ta AR v marketyngu yf rynkah budivnytstva, proektuvannia ta dyzainu. Markeyng i kontrollyng: suchasni vyklyky pidpryyemnytstv. Kyiv. 170–173. http://elar.nung.edu.ua/bitstream/123456789/6150/1/6727p.pdf [The use of VR and AR technologies in marketing in the construction, design and design markets. Marketing and controlling: modern challenges of entrepreneurship]
11) Digital Marketing Trends to Watch Out For in 2018. https://digitalmar ketinginstitute.com/blog/30-08-17-6-digital-marketing-trends-to-watch-out-for-in-2018
12) Vorst I., Reventlow P. 2005. Economy firms. M.: Higher School. 460 p.

Метатеорії в освіті

Metatheories in education

Interdisciplinary Studies of Complex Systems
No. 16 (2020) 75–86

https://doi.org/10.31392/iscs.2020.16.075

Meta-theory of modern pedagogical knowledge: Innovation, professional development

Hanna Tsvetkova[1,2], *Iryna Voityuk*[1,3], *Victoriia Domina*[4,5]

Abstract. This article deals with some aspects of modern pedagogical knowledge, in particular with the role of meta-theory in innovations. The innovation is viewed through the prism of meta-theory as the ability to a new, reflexive, constantly updated knowledge; openness to innovative changes on the grounds of critical thinking; development of creative abilities; ability, readiness and ability to continuous professional self-development and self-disclosure. The general understanding of "meta-theory" has been explored as a complex term used to identify such systems, which in turn is applying to describe or to research other systems. The innovative development of higher education is in the article one of such systems, which is based on the professional self-improvement of subjects of the educational process and disclosed with the help of the reflexive system of meta-theory of philosophy. The methods of terminological analysis, abstraction, idealization, formalization and generalization are used. It was found out that innovative development of higher education is based on professional self-improvement of subjects of educational process and disclosed with the help of reflexive system of meta-theory of philosophy. It is proved that innovative processes in high school can not be considered without the self-improvement of the personality, gaining global significance.

Keywords: meta-theory, meta-theoretical approach, innovation, professional self-improvement, integrity, subjects of educational process, personality, self-development

Relevance of research

A characteristic feature of contemporary social processes is awareness of the importance and significance of the education of creative, innovative personality, which constantly strives for self-development, self-improvement and self-realization. This problem gets a new sound concerning a high school that provides the intellectual potential of the nation, its future.

The fundamental tendencies of modern science are its differentiation and integration. We are witnessing the expansion of scientific knowledge, the multifaceted means of obtaining relevant scientific knowledge. Researchers in different countries point out that differentiation takes place in a disciplinary sphere,

[1] National Pedagogical Drahomanov University, Kyiv, Ukraine
[2] tsvetkova1271@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-1556-4856
[3] irina_voituk@ukr.net, https://orcid.org/0000-0002-7615-1812
[4] National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine
[5] domina@nubip.edu.ua, https://orcid.org/0000-0002-7615-1812

the scientific space is segmented into a multitude of disciplines, sub disciplinary areas, and branches that receive a certain degree of autonomy in the substantive, methodological and institutional aspects.

It is important to draw attention to the fact that interdisciplinary studies that have become popular in recent times, resist fragmentation and segmentation in the scientific space. The positive aspect of these studies is that they are based on the interaction of disciplines because of convergence of their notions about subject fields, the formulation of scientific problems. But to ensure the intensive integration of science (in our case pedagogical) only on the basis of interdisciplinarity is very difficult.

Consequently, the integration vector in pedagogical science can be realized through the access to a more abstract "supra-subject", "supra-disciplinary" scientific space. And this, in turn, requires a reflexive approach, called meta-theory, meta-theoretical approach, meta-theoretical knowledge in modern scientific research.

At the beginning of the XXI century, philosophical, psychological pedagogical views are diversified, new approaches to the study of complex pedagogical phenomena appear, the innovation space is constantly expanding. Under such conditions, in our opinion, the pedagogical understanding of innovative development of higher education on the basis of a meta-theoretical approach that provides the integrity and multidimensionality of scientific research, reflects the integration of scientific knowledge and scientific directions, is important.

State-of-the-art

The fundamental provisions of the meta-theory are sufficiently fully represented in the conceptions of the meta-theory of consciousness Merab Mamardashvylli, Oleksandr Piatyhorskyi , the interval concept of Feliks Lazariev, the theory of macro-systems Ervyn Laslo, version of the multidimensionality Marharyta Driuk.

The problem of spirituality, which leads to the search for perfection, is presented in the writings of Volodymyr Barulin, Halyna Bespalova, Serhii Krymsky, Yurii Osychniuk.

The ideas of human openness are reflected in the concept of "symphonic personality" Lev Karsavyn and cosmic presented by Volodymyr Vernadskyi, Volodymyr Soloviov, Kostiantyn Tsiolkovskyi.

The question of the philosophy of education is discussed by Viktor Andrushchenko, Oleh Bazuluk, Volodymyr Bekh, Volodymyr Buryak, Borys Hershunskyi, Vasyl Kremen.

The stimula for studing the problems concerning innovative approach and principles of adult education are grounded in the works of Lidiia Danylenko, Anatoliy Kuzminskyi, Larysa Lukianova, Tamara Sorochan. Innovation as a strategy for the development of modern higher education is considered in the works of Iryna Havrysh, Lidiia Danylenko, Volodymyr Ziahviazinskyi, Ivan Podlasyi, Vitaliy Slastonin, Hanna Tsvietkova.

The purpose of the article is to reveal the essence of the meta-theoretical approach as the necessary basis for modern scientific and theoretical thinking, an effective tool for gaining knowledge of a new type; to characterize the meta-theoretical basis of pedagogical understanding of innovative development of higher education.

The next methods of research are used to get an adequate conclusions: analysis and synthesis — in order to reveal the essence of the meta-theoretical approach; a method of terminological analysis, associated with the definition of the categorical status of meta theory, innovation development in the system of pedagogical definitions; abstraction, idealization, formalization and generalization — to systematize and formulate conclusions, determine the directions of further study of the problem.

Discussion

A characteristic precondition for the development of modern knowledge, theoretical sciences, and new theoretical generalizations is the synthesis of approaches and methods on the basis of philosophy. Synthesis involves combining, first of all, demarcated logic-linguistic, analytical, phenomenological, hermeneutic, existential personalistic methods, concepts and approaches of philosophy, as well as interdisciplinary combination of philosophical, sociological, psychological, linguistic, and pedagogical research. In this context we would like to remind that the decisive tendency of the philosophy of the 20^{th}—21^{th} centuries is a rethinking of the traditional problems of knowledge, of truth in the context of communication, interaction of individuals, combining subjective issues with subjects of intersubjectivity, dialogue, broad discussion of the fundamental problems of modern mankind" [9, 47].

To discuss the key issues of the problem one has to be aware that meta-theory is a complex multi-faced phenomenon. Meta-theory in its modern sense is a theory of theory. The object of scientific analysis for meta-theory is the "very" theory.

Taking into account the fact of interdisciplinarity of such a kind of theory it is important to look at its definitions in different sciences. Thus, in sociology meta-theory is defined as general philosophical references, which provide rules for the creation of certain sociological theories and the justification of the use of specific sociological methods [1].

Another idea lies in the meta-theory as a theory that analyzes the structure, methods and principles of a certain scientific theory [7].

The meta-theory in the Great Interpretative Dictionary [10] is defined as all or certain estimates of the second order of general theory etc.

The meta-theory "...define the context in which theoretical concepts are constructed... The primary function of metatheory — including metamethod — is to provide a rich source of concepts out of which theories and methods emerge. Metatheory also provides guidelines that help to avoid conceptual confusions and, consequently, help to avoid what may ultimately be unproductive ideas and unproductive methods" [18].

The next a very important point of our discussion is: the meta-theoretical level of scientific knowledge is a set of principles, norms, ideals, which form the basis of scientific theories and science in general, which ensure the unity and certainty of scientific activity, affect the nature of theoretical knowledge.

The meta-theoretical level of scientific knowledge became first the subject of study in the concepts of post-positivism. In this sense the meta-theoretical level of scientific knowledge refers to the scientific picture of the world, the style of scientific thinking. Interpretations of scientific rationality, paradigm, research program play specific role in this context. Due to the systematic nature of scientific knowledge meta-theoretical level refers to fundamental scientific theories [13].

From the philosophical point of view the fulfillment of the requirements put forward for the development of a particular meta-theory is associated with great difficulty in the formation of a meta-theory for non-mathematical or for non-mathematical sciences at this stage, and it is argued that each scientific theory defines a certain fragment of the real world, and its meta-theory is a system of concepts and provisions of this theory. The main task of each meta-theory is to set the boundaries of the sphere of application of the theory under study, to answer questions that characterize the latter from the standpoint of objectivity and completeness, to explore the means of introducing its new concepts and propositions. In our opinion the article of Filipe J. Sousa (professor at University of Madeira) presents a good ground for discussions in this context [17].

Thus, according to a preliminary analysis, the meta-theoretical level of research is the level of such a scientific study, which is self-reflection of science, its self-knowledge. The last thesis in its content concerns the reflexivity of scientific and theoretical knowledge, a peculiar theorizing of science and is a qualitatively interesting scientific phenomenon which "requires the interconnection of self-reflection into the fabric of scientific research" [11, 47].

The key thesis of our theoretical analysis is the next: the meta-theoretical approach — not only reorganizes scientific and pedagogical knowledge, but also becomes the basis on which new knowledge is created, transforming the essence-semantic structure of the theory. In this case, the meta-theory has more evidence of cognition, using more powerful systems of reasoning. This is proved in the writings of researchers mentionedabove Merab Mamardashvylli, Oleksandr Piatyhorskyi, Feliks Lazariev, Ervyn Laslo, Marharyta Driuk.

All the presented theoretical positions lead to the conclusion that the meta-theoretical approach is a necessary foundation for modern scientific and theoretical thinking, an efficient tool for acquiring knowledge of a new type — reflexively oriented, aimed at analyzing the depths of pedagogical theory, ensuring the reliability of its methodological prerequisites.

The general understanding of "meta-theory" has been described by us as a complex term deserving to identify such systems, which, in turn, are used to describe or to research other systems is. In our case, one of these systems the innovative development of higher education, which is based on the professional self-improvement of the subjects of the educational process and disclosed with the help of the reflexive system of meta theory of philosophy.

At that, innovation is considered by us as a capability for a new, reflexive, constantly renewed knowledge; openness to groundbreaking changes on the basis of critical thinking; development of creative abilities; ability, readiness and ability to continuous professional self-development and self-disclosure.

The mega trends Ilona Dichkivska that are characteristic of modern higher education (the mass character of education, its significance, the orientation to the active development of a person's ways of cognitive activity, the adaptation of the educational process to the needs and needs of the individual, the orientation of training of a personality, ensuring the possibilities of self-disclosure), testify that the main function of higher education is the self-improvement of the individual and the teacher and the student. Consequently, the phenomenon represented is a characteristic feature, a significant factor in the innovative development of higher education.

Generally philosophical and educational concepts of the formation and development of the phenomenon of self-improvement can clarify, expand the content of this phenomenon. Consequently, the meta-theoretical basis of pedagogical understanding of the phenomenon of self-improvement is as follows:

1. Philosophy — a meta-theory, which is the basis of the methodology of pedagogy. On the basis of historical analysis of philosophical views, methodological approaches to the study of self-improvement of teachers of humanities, an analysis of specifics, peculiarities of self-improvement is carried out; the of modeling of means, ways of creating an effective self-improvement technology are developed, that is, the conceptual and active solution of the actual pedagogical problem takes place.

2. Theoretical and methodological substantiation of the phenomenon of self-improvement from the standpoint of meta-theory in educational practice significantly expands the latter, integrating the achievements of general philosophy, the results of theoretical analysis and pedagogical practice, socio-political and pedagogical movements.

Moreover, philosophy is a science that thoroughly explores and attempts to solve the global problems of mankind, and to satisfy the individual interests of people, to find harmony between personality and society. It was in the bosom of philosophy that most of the humanities, including pedagogy, developed. Therefore, for our study is very relevant and weighty analysis of philosophical concepts and theories, which opens up new opportunities for purposeful correction of the educational process [14].

Philosophy forms the "image" of a person of the future, meaningfully fills pedagogy with new knowledge, goals, means of action, which ultimately turn the internal system of views of each particular generation. The discovery of the essence and principles of self-improvement at the present stage of the development of philosophical thought is associated with two fundamental principles. The first is connected with the solution of the problem of combining post-classical approaches to the analysis of the ontological foundations of human existence and the classical transcendental methodology. The second — with the need to eliminate the dualism of theoretical and practical philosophy [8]. Therefore, at the forefront of modern philosophical trends, an appeal to the transcendental, spiritual, through which the contradictory world of man acquires the harmony, balance, balance of existence and normative and value measures, is turned to the fore.

Thus, Valentyn Andryeyev, characterizing the state of public opinion, states that there was a substitution of the spiritual intellectual. The transfer of the human psyche from the higher values to the field of utilitarian values is a sign of our time [2].

It clearly and substantially characterizes the modern cultural-historical process and marks the final gap between the spiritual and the intellectual at the turn of the XX–XXI centuries. Dismissive attitude towards irrational, intuitive, and emotional generates dangerous deformations of the behavior of the human community.

The need for a harmonious combination of soul and peace is on the rise. At the forefront of modern philosophy is the idea of self-improvement, the result of which is not the change of objects, but the change of subject. It is about transformation, transformation of the inner world of man. Therefore, the question is urgent: "How should I be?".

The founder of philosophical anthropology, Maks Sheler, actualized the problem of balancing various aspects of human existence, which would lead to intellectual creation as an ability to rebuild its inner world, its own microcosm. This makes an individual intellectually independent of being. According to Maks Sheler, the natural, physical and psychic peculiarities of a person are subject to equilibrium; spiritual, individual and national differences; the differences of mentality, the views on the "me, the world and God" [15].

The specificity of male and female; youth and maturity; scientific knowledge and education, physical and mental labor; the extrovert orientation of the Western person and oriental introvertism with its focus on the "technique of internal power" of man over himself, etc. Mykola Berdiaiev, Emile Munier, Helmut Plessner, Paul Ricoeur, Maks Sheler, perceive the essence of man in the constant harmonization of the mutual influence of natural and social, and the natural is not reduced directly to the biological, but has infinity of space.

A number of researchers insist on strengthening the spiritual principle in the life of a modern man [14] as the basis for self-improvement and response to functionalization, alienation, unilateral professionalization. It is clear that in these conditions the need for radical transformation of consciousness, human behavior, harmonious combination of rational intelligence and spiritual and emotional sphere is growing. In the foreground the spirituality, which leads to the search for perfection is.

Volodymyr Barulyn, Halyna Bespalova, Serhii Krymskyi, Yurii Osichniuk, Serhii Frank define spirituality as a complex of processes with the prefix "self": self-building, self-awareness, self-identification, self-reflection. Halyna Bespalova so revealed the possibility of self-improvement: "Anyone who feels this pleasure self-guided self-propelled, is unlikely to ever want to give up an exciting progress forward.

Self-creation — the most significant life problem and the most dangerous activity. You can forget about it, you can be unprepared for it, but you can begin to artificially form it, regardless of the internal or external conditions" [6, 77].

However, realizing himself, spiritually self-identifying, man seems to be divided. On the one hand, it turns into a subject of certain relations, "I-subject", on the other — it its "I" transforms into an object of certain relations "I-object". Philosopher Volodymyr Barulin notes that "one of the fundamental features of human existence and development is that it itself transforms itself into an object of reflection, a peculiar attitude.

It includes in the mechanism of personal development an analysis of itself, self-esteem and positive, and negative, and often very tough, constantly developing programs of personal transformation. And this transformation into an object of personal attitude — a kind of split, distance from itself and a conscious transformation of oneself is one of the most important factors in the progress of man and society" [4, 463].

The philosopher, singling out the fundamental qualities of man (spirituality, creativity, freedom), highlights the meaning-value self-affirmation, which consists in a certain assertion of the meaning of his life, his values: "That the person did not do what would not achieve the goal — building a home, inventing new ones technological schemes, creating novels, bringing up children, fighting with aggressors, etc. — everywhere and always she is looking for and asserts for himself a personal sense, individual and human self-value" [2, 470]. This, according to the scientist, is the foundation of the existence of every human being, without which it is impossible to have a full human existence.

The infinite potential of a person and its opposition to society is one of the fundamental contradictions of modern social development. Society tries to create a "completed" person, in other words, a person who is optimally suited to the requirements and social roles of society. But human nature, the immanent impulses of man and his possibilities are so limitless that man can never be completed. In this regard, the opinion of Karl Jaspers, who considered: that a person can not be completed, in order to be, it must change in time, obeying a new fate [16, 411].

In the twentieth century the idea of human openness is formalized in the concept of "symphonic personality" Lev Karsavin and cosmism Volodymyr Vernadskyi, Volodymyr Soloviov, Mykhail Fedorov, Kostiantyn Tsiolkovskyi, Oleksandr Chyzhevskyi, in which a person is a cosmopolitan social phenomenon.

Considering the relations between man and society, modern philosophy states that every person, in a certain sense, is a part of society, its generation, which is programmed by the society, lives in it, and, therefore, is socially completed and socially immanent. On the other hand, a person is potentially omnipotent, equals society, self-programmed, social transcendent: "Person is potentially infinite, potentially universal. Its uniqueness, uniqueness, embodied in the spiritual world, in an irresistible quest for creativity, in the deepest state of freedom, in life, as a sense-value self-affirmation, and determines this potential infinity" [4, 475].

Consequently, person is lifelong incomplete, open to endless creation and self-perfection. What kind of person she can become depends on her, her life choices, the realization of her freedom, and the constant growth of her spiritual powers.

Implementation of self-improvement is possible is the case when a person becomes an integral person. Modern researchers state that in the process of studying a person, it splits into a thousand parts, projections, disappeared as a whole. Therefore, in today's anthropological crisis, the holistic study of man is very relevant. The modern researcher Iryna Bondarevych defined the an thropositionogenesis as "the process of mimicking the incompleteness of man, his self-deployment from the species to the genera, which at the present stage proceeds on the basis of powerful changes in its spiritual component.

The modern era actualizes the formation of the spiritual integrity of modern man as a key problem of modern anthroposotsiogenizu" [8, p.38]. Hence, the formation of a holistic person is to overcome the internal conflict, the disharmony of the physical and spiritual-spiritual, the tearing-all that stands on the path to self-improvement.

Consideration of the problem of self-improvement is complicated by the fact that attempts to as much as possible holistically know the person only partially approach the integrity, to the embodiment of the ideal of holistic study. Philosophical, culturological, psychological, pedagogical, and interdisciplinary approaches, including art and literature, create only partial conceptions of a person and its perfection. In this aspect, it is appropriate to think that philosophy should carry out human studies not only by scientific methods but also by their own (transcendental, phenomenological, analytical — all these methods are partial cases of the method of philosophical reflection) [14].

The life of man and the experience of the twentieth century confirmed the position of existentialism and psychoanalysis concerning human existence. Man is a complex, unpredictable, contradictory nonlinear creation of nature. This was reflected in the new method — synergy, or the theory of the organization of human-like systems. The principles of this theory reflect all the complexity of the latter, namely: the principles of fluctuation, nonlinear development, unpredictability, nonlinearity, intolerance to external interventions, self-organization, etc.

The problem of self-improvement, considered in the context of the systemic and synergetic theory, acquires a new sound and is filled with a new meaning, because it allows one to consider a person as a specific system capable of self-development, self-development with its life cycle from one state of bifurcation (the critical moment of uncertainty of future development or point the branching of possible ways of evolution of the system) to another.

In the context of solving the problem of self-improvement of human being, the following positions are of great importance regarding the integrity of a person (the latter is one of the conditions for effective self-development):

- the integrity is characterized by new qualities and properties that are not inherent to individual parts, but arise as a consequence of their interaction in a definite system of bonds that prevail over external influence;
- the whole set has the ability to self-development (characterized by stages of complication and differentiation), which is regulated by the internal goal.

Integrity can be different in types: structural integrity, functional integrity, organizational integrity through which progress occurs or regress of the system:

- integrity — is a dynamic whole (not only the structure, but also its internal connections), experiencing at first the contradiction of formation, and then the formation of contradiction;
- the causal connections in the integrity have a functional dependence: the cause is the consequence, the latter — a prerequisite for a new level [5, 24].

The accented methodological positions of the concept of “integrity” as a condition for self-improvement allow us to outline the vectors of self-development of the individual:

1. Self-improvement of the individual — a moving, dynamic structure, which in the end leads the person to a new stage of development and creates a qualitatively new property of the latter.

2. In a person simultaneously the power of mind and heart is combined, without this harmonious combination impossible internal revolution and spiritual transformation. Man is a set of different synergistic systems, which ideally must complement each other.

3. The main task of the humanities is to find out what elements of the system should be in the structure of the individual in order to be able to self-development, self-deployment, self-reflection. In other words, it must be formed in a person so that it as a system is capable of self-development, so that the system synergetics has an evolving orientation. In this sense, the views of the representatives of the existential anthropology of the Kyiv philosophical and anthropological school Yevhen Bystrytskyi, Sergiy Krymskyi, Vladimir Malakhov, Sergiy Prolyeyev, Volodymyr Shynkaruk deserve attention.

Hence, self-improvement of man is the most important global problem of human civilization. At the turn of the XX–XXI centuries — it is an actual problem for meta-anthropology, which synthesizes approaches of philosophical anthropology, existentialism, personalism and defines the most important tendencies of the development of contemporary philosophical anthropology. This problem is at the center of attention of the representatives of the Ukrainian philosophical thought: Volodymyr Bekh, Iryna Bondarevych, Vasyl Kremen, Liliia Nykyforova.

Recently, the development of the subject "Philosophy of Education" is being updated, in which an attempt is made to synthesize rational and irrational in order to achieve concrete goals in shaping the image of a person of the future. The question of the philosophy of education is disclosed in the researches of Victor Andrushchenko, Oleh Bazuluk, Volodymyr Buriak, Borys Hershunskyi and others. Researchers Oleh Bazuluk, Oleksandr Zapesotskyi emphasize that considerable interest in the philosophy of education is caused by the objective and conscious society of the role of education in solving global problems.

Education is a fundamental condition for the person to exercise his civil, political, economic and cultural rights, which is the most important factor in the development, self-development, and strengthening of the intellectual potential of the nation. Accordingly, people who carry out education must be specialists and reflect on their personality the highest self-sufficient and self-consciousness of human significance.

At the same time, in modern philosophical science there is a contradictory view on the philosophy of education. Analyzing modern concepts of the philosophy of education, one must realize that "the subject of the philosophy of education is not so much a philosophical awareness of the process of obtaining knowledge, skills and abilities as a large-scale study of cultural achievements and values that are designed to meet the needs of the education system. Philosophy introduces in pedagogy the main thing and the fact that it is absent — a large-scale vision of social transformations, dominant at this historical stage, ideological concepts" [3, 11].

Consequently, the philosophy of education, putting forward general, systemic and fundamental tasks, combines a variety of pedagogical concepts and makes the process of formation coherent and harmonious. Oleh Bazuluk, for example, considers the interaction of the philosophy of education and pedagogy as the interaction of the triad: philosophy — the philosophy of education — pedagogy. Philosophy of education through philosophy borrows most advanced studies of cosmology, physics, neurophysiology, psychology. The philosophy in these areas reflects the achievements in the prism of the most relevant ideological concepts. Through pedagogy, the philosophy of education attracts the most advanced methods of education and learning, influencing the inner world of the younger generation. The formation of the philosophy of education occurs when changing the philosophical picture of the world, reflected in the content of educational activities, the professionalism of its representatives, models of self-improvement and methodological prerequisites.

Conclusion

Innovative development of higher education is based on the professional self-improvement of subjects of the educational process and disclosed with the help of the reflexive system of meta theory of philosophy. We are considering innovation as the ability to new, reflexive, constantly updated knowledge; openness to innovative changes on the grounds of critical thinking; development of creative abilities; ability, readiness and ability to continuous professional self-development and self-disclosure.

Thus, the meta-theoretical basis of pedagogical understanding of innovative development of higher education is the professional self-improvement of the individual and the teacher and the student. Representatives of the philosophy of education substantially complemented the idea of a comprehensive and harmonious development of personality concept of the planetary-cosmic type of personality as an image of the future man. The person of the future is a harmony of mind, soul and body, aimed at realizing internal creative potentials on the scale of the Earth and the Cosmos, capable of self-deployment and self-improvement.

Література

1) Аберкромби Н. С., Хилл Б. С., Тернер И. Г. 2004. Социологический словарь. Москва: Экономика.
2) Андреев В. И. 2000. Педагогика : учеб. курс для творческого саморазвития. Казань : Центр инновац. технологий.
3) Базалук О. А. 2010. Философия образования в свете новой космологической концепции : учебник. Киев : Кондор.
4) Барулин В. С. 1999. Социальная философия : учебник : в 2-х ч. Москва : МГУ, Ч.1.
5) Беспалова Г. 2006. Формування української ментальності. Україна в системі духовних, економічних, та політичних координат глобалізованого світу. Київ : Нац. акад. упр.
6) Большой словарь по социологии. http://www.вокабула.рф/словари/большой-словарь-по-социологии (дата звернення 14.04.2019)

7) Бондаревич І. М. 2008. Духовна цілісність особистості: Дійсність і перспектива: монографія. Запоріжжя: ЗНТУ.
8) Дэвид Д. 1999. Большой толковый социологический словарь. Москва : АСТ «Вече».
9) История философии. Запад — Россия — Восток : в четырех кн. 2000 / Мотрошилова М. В. (ред.). Москва : Греко-латинский кабинет, Т. 4.
10) Колізії антропологічного розмислу. 2002 / В. Г. Табачковський, Г. І. Шалашенко, А. М. Дондюк та ін. Київ : ПАРАПАН.
11) Лекторский В. А. 1997. О толерантности, плюрализме и критицизме. *Вопр. философии.*11. 46–54.
12) О человеческом в человеке. 1991 / под общ. ред. И. Т. Фролова. Москва.
13) Философия науки и техники: тематический словарь. https://science_philosophy.academic.ru/173/метатеоретический_уровень_научного_%c2%a0познания (дата звернення 14.04.2019)
14) Цвєткова Г. Г. 2014. Професійне самовдосконалення викладачів гуманітарних дисциплін вищої школи : монографія. Слов'янськ : Вид-во Б. І. Маторіна.
15) Шелер М. 2011. Проблемы социологии знания / пер. с нем., коммент., послесл. А. Н. Малинкина. Москва : Ин-т общегуманит. исследований.
16) Ясперс К. 1991. Смысл и назначение истории. Москва.
17) Filipe J. 2010. Sousa. Meta-Theories in Research: Positivism, Postmodernism, and Critical Realism. *SSRN Electronic Journal. February.* https://www.researchgate.net/publication/228300432_Meta-Theories_in_Research_Positivism_Postmodernism_and_Critical_Realism
18) Overton Willis F. and Müller Urlich. 2012. Methatheories, Theories, and Concepts in the Study of Development. Article January : 10. https://www.researchgate.net/publication

References

1) Aberkrombi N. S. Hill B. S. Terner I. G. 2004. Sotsiologicheskiy slovar. Moskva : Ekonomika.
2) Andreev V. I. 2000. Pedagogika : ucheb. kurs dlya tvorcheskogo samorazvitiya. Kazan : Tsentr innovats. tehnologiy.
3) Bazaluk O. A. 2010. Filosofiya obrazovaniya v svete novoy kosmologicheskoy kontseptsii : uchebnik. Kiev : Kondor.
4) Barulin V. S. 1999. Sotsialnaya filosofiya : uchebnik : v 2-h ch. Moskva : MGU, Ch.1.
5) Bespalova H. 2006. Formuvannia ukrainskoi mentalnosti. Ukraina v systemi dukhovnykh, ekonomichnykh, ta politychnykh koordynat hlobalizovanoho svitu. Kyiv : Nats. akad. upr.
6) Bolshoy slovar po sotsiologii. http://www.вокабула.рф/словари/большой-словарь-по-социологии
7) Bondarevych I. M. 2008. Dukhovna tsilisnist osobystosti: Diisnist i perspektyva: monohrafiia. Zaporizhzhia: ZNTU.

8) Devid D. 1999. Bolshoy tolkovyiy sotsiologicheskiy slovar. Moskva : AST "Veche".
9) Istoriya filosofii. Zapad — Rossiya — Vostok : v chetyireh kn. 2000 / Motroshilova M. V. (red.). Moskva : Greko-latinskiy kabinet, T. 4.
10) Kolizii antropolohichnoho rozmyslu. 2002 / V. H. Tabachkovskyi, H. I. Shalashenko, A. M. Dondiuk ta in. Kyiv : PARAPAN.
11) Lektorskiy V. A. 1997.O tolerantnosti, plyuralizme i krititsizme. Vopr. filosofii. № 11. S. 46–54.
12) O chelovecheskom v cheloveke. 1991 / pod obsch. red. I. T. Frolova. Moskva.
13) Filosofiya nauki i tehniki: tematicheskiy slovar. https://science_philosophy.academic.ru/173/метатеоретический_уровень_научного_%c2%a0познания
14) Tsvietkova H. H. 2014.Profesiine samovdoskonalennia vykladachiv humanitarnykh dystsyplin vyshchoi shkoly : monohrafiia. Sloviansk : Vyd-vo B. I. Matorina.
15) Sheler M. 2011. Problemyi sotsiologii znaniya / per. s nem., komment., poslesl. A. N. Malinkina. Moskva : In-t obschegumanit. Issledovaniy.
16) Yaspers K. 1991. Smyisl i naznachenie istorii. Moskva.
17) Filipe J. 2010. Sousa. Meta-Theories in Research: Positivism, Postmodernism, and Critical Realism. *SSRN Electronic Journal. February.* https://www.researchgate.net/publication/228300432_Meta-Theories_in_Research_Positivism_Postmodernism_and_Critical_Realism
18) Overton Willis F. and Müller Urlich. 2012. Methatheories, Theories, and Concepts in the Study of Development. Article January : 10. https://www.researchgate.net/publication

Interdisciplinary Studies of Complex Systems
No. 16 (2020) 87–101

https://doi.org/10.31392/iscs.2020.16.087

Educational innovation studies as a complex system

Natalia Demyanenko[1]

Abstract. Educational innovations are defined as a complex, self-renewing systemic formation, dependent on changing social and educational priorities. The system of educational innovations has been developed taking into account the methodological and historical bases of its formation, defining the object and subject, classifications of innovations in education, criteria for selection and implementation of innovative experience, quality of innovative activities. Based on the analysis of scientific and theoretical approaches, the object of pedagogical innovation studies is the innovation process, conditions, methods and results of its implementation, the subject is the relationship between the efficiency of innovation processes and its determining factors, as well as ways of influencing these factors in order to increase the effectiveness of changes. The conceptual and categorical apparatus of educational innovations has been defined. The paper demonstrates diverse scientific views in the interpretation of its essence leading to the coexistence of different approaches in typologization and classification of pedagogical innovations. The scope, innovative potential, and scale of transformations are considered the main peculiarities of innovations. The empirical part presents the results of the scientific contextual Master's project "Innovative Experimental Educational Systems" implemented at the National Pedagogical Dragomanov University (Kyiv, Ukraine). The "quality of innovation activities" is considered a promising trend in the further study of educational innovation problems. Pedagogical universities are defined as the centres of forming students" ability to analyse, summarize, select innovative pedagogical experience, design and persistently introduce it into educational practice.

Keywords: educational innovations, system, experimental innovative experience, classification, selection, design, implementation of innovations, quality of innovative activities

Relevance of the problem

The globalization of the educational space gives rise to the search for a new educational paradigm. Innovations oriented generally to holistic, interdisciplinary, complex development and changing of the educational reality have always been one of the areas clearly reflecting paradigmatic changes. Today they are considered within a separate field of scientific knowledge — educational (pedagogical) innovation studies, integrating the ideas of innovation theory, philosophy, cultural studies, sociology, psychology, acmeology, creatology, for-

[1] National Pedagogical Drahomanov University, Kyiv, Ukraine.
n.m.demyanenko@npu.edu.ua, https://orcid.org/0000-0002-5748-8292

ming the basis for the development of innovative pedagogic and educational systems and their further implementation in modern education processes. The range of innovations is quite wide. They cover programs and standards, educational content, educational technologies, organization, and management of the educational environment. In this setting, the initiative belongs to a new type of a researcher — the teacher-experimenter-practitioner (in science) and the teacher/ educator-researcher (in practice), thus generating innovative educational experience. Its best models should be the basis for the education of future teachers who will educate new generations for the united Europe [1].

This places a priority on the *task of exploring* educational innovations as a complex, self-renewing systemic formation dependent on changing social and educational priorities. Therefore, we consider the system of educational innovation taking into account the methodological and historical bases of its formation, defining the object and subject, classifications of innovation in education, criteria for selection and implementation of innovative experience, quality of innovative activities.

State of development of the problem in theory and practice. The general theory of innovations dates back to the second half of the 19th — beginning of the 20th centuries and is consistent with the conceptual approaches of M. Weber, E. Fromm, O. Spengler. The changes related to the emergence of the theory of innovation and expansion of innovation activities were substantiated by D. Bell, J. Burnham, I. Wallerstein, J. Galbraith, P. Drucker, D. Meadows, T. Parsons, A. Peccei, A. Toffler. The first studies focused mainly on economic problems. The definition of cycles of innovations (J. Schumpeter) contributed to the activation of production processes in the 1920's. Since the 1930's, the terms "innovation policy", "innovation process", etc. appeared in macroeconomics, resulting in the formation of the conceptual and categorical apparatus of innovation. It generated the science of innovation and further research, with the results reflected in the works of I. Ansoff, M. Barre, W. Brown, K. Oppenlander, K. Pavitt, E. Rogers.

Initially exploring economic, social patterns of creating and disseminating scientific and technological innovations, later — innovations in organizations and enterprises, in the late 1950's, innovation became an area of the interdisciplinary study of innovations. Approximately since that time, the rationale *for educational innovation* may be found in the works of K. Angelovski, H. Barnett, J. Bassett, D. Hamilton, N. Gross, W. Kingston, N. Lagerwey, M. Miles, A. Huberman, R. Havelock. Their papers symbolised the beginning of the internationalization of innovative educational processes. From our point of view, the reformist pedagogy of the early twentieth century with its deep interest in the child's personality, new solutions to education and upbringing served as a unique impetus for this. Anti-traditionalists (educators who opposed traditional theory and practice of education) sought ways of forming a personality throughout the whole period of childhood. The main approaches included pedagogy of positivism (G. Spencer), theory of "free education" (E. Key, F. Gansberg, L. Gurlitt, H. Scharrelmann, P. Lacombe, M. Montessori), experimental pedagogy (E. Meumann, E. Thorndike), pedagogy of action (W. A. Lay), pedagogy of pragmatism (J. Dewey), pedagogy of culture (W. Dilthey), theory of "labour school" and "civic education" (J. Bédier, H. Gaudig, G. Kerschensteiner,

K. Woodward), pedology (E. Thorndike, S. Hall, A. Binet), theory of "new education" and "new schools" (C. Reddie, E. Demolins, A. Ferrière, P. Geheeb, H. Lietz) [9, p. 489]. The ideologists of new educational systems and technologies opened experimental educational institutions. This experience has made a significant impact on the formation of pedagogical innovations in the national education of the 20–30's of the last century, when in response to the acute needs of improving educational practice, the demand for social education ideas, our country hosted first experimental schools — educational institutions, implementing "a new pedagogical system, developed by a particular teacher or creative pedagogical team" [22, p. 8]. Experimental schools became known by the names of their creators (scientists or practitioners), with the creation of a pre-developed original conceptual project as their peculiarity.

The history of foreign and domestic education saw outstanding patterns of experimental schools. In particular, the Free School Community by H. Lietz, P. Geheeb (Germany) — boarding schools, acting on the principles of the child's free development and cooperation of citizens of a small society. The education was based on compulsory work and school choice. G. Kerschensteiner's Labour School (Germany), Ecole Des Roches School (France), A. Makarenko's colony and commune, S. Shatsky's school, P. Blonsky's school, which provided vocational training for schoolchildren, focused on work as Leipzig, L. Tolstoy's Yasnaya Polyana School considered inappropriate to teach a specific subject or trade. The interest in the student's development was decisive, so the time of their communication with the teacher was not limited. The School "for Life, through Life" (O. Decroly, Belgium) provided education and upbringing in close connection with nature, with support for the child's activities and freedom (centres of interest), close contact with the pupils" families. The School of Action (J. Dewey, USA) sought to bring learning closer to the lives and experiences of children, stimulating their natural development. The education process took into account the basic impulses of the child's natural growth: social (desire for communication), constructive (desire for movement in the game), research (craving for knowledge and understanding), expressive (desire for self-expression). Communication of children of all ages occurred mainly in extracurricular activities. It gave rise to "game school" (K. Pratt), based on the principle of using the game and the method of dramatization in the learning process; the "children's school" (M. Naumburg), guided by the motto "only by living, we learn" and giving preference to individual lessons; "Organic school" (M. Johnson), which focused on constructive classes in groups. Peculiarities of the above American schools included the desire to find new methods of teaching, attention to the interests of children, the study of individual characteristics of pupils, the development of their activity, the general tendency to practical and utilitarian learning and upbringing [3, p. 125–127].

To date, the experience of the following schools is still crucial: Waldorf School (R. Steiner's Pedagogical System, Germany), which was based on an anthropological understanding of the process of the child's development as a holistic interaction of physical and spiritual factors, solving the task of comprehensive personality development through intense spiritual activity; M. Montessori School (Italy) — a pedagogical system that envisaged the activity of children in a specially created environment (processes of self-discovery and exploration of the surrounding world took place in different age groups); S. Freinet's "School of Technology" (France), which grounded technologies of purposeful stimulation of pupils" intellectual and emotional activity, implemented new methods of education, development of useful social work at all stages of education and effective school self-government; educational institutions organized according to the "project method" (W. Kilpatrick, USA; B. Russell, UK), where the curriculum was structured in a set of interrelated experiments and pupils were given complete freedom of choice; the Dalton Plan-based schools (E. Parkhurst, USA), guided by the principles of the child's freedom, focused on the individual rhythm of learning, multi-age communication. This experience shows that educational innovations provide a link between traditions and design of future education. We agree with A. Boiko's opinion that the main thing is not the time of origin, but how the innovation serves the practice, improving the quality of education or upbringing, social goals and values. The new often reinterpreted the past and serves the development of the known, traditional, time-tested achievements of science grounded at a new level, in new social pedagogical realities and opportunities. Thus, the revival of productive scientific ideas, development of the latest achievements of science on their basis, enrichment with practice, as well as verification at a higher level of generalizations are also innovations requiring considerable creative efforts [2, p. 29]. Thus, innovations involve not only chronologically new ideas and experience but also those of outstanding educators of the past. The experience of the experimental schools of V. Sukhomlinsky (Pavlysh Village, Kirovohrad Region), I. Tkachenko (Bogdanivka Village, Kirovohrad Region), O. Zakharenko's family school (Sakhnivka Village, Cherkassy Region), etc., is still relevant and develops at new creative levels. The concepts and practices of such schools are usually different from the traditional ones and are often based on contrasting the existing system, its criticism and demonstration of the benefits of new approaches over the known ones.

Innovative pedagogical experience at the level of an independent scientific field was summarised in the works of well-known academic educators (Yu. Babanskyi, L. Hordin, V. Zagviazinskyi, V. Lazariev, M. Potashnyk, V. Slastonin, A. Khutorskoi, N. Yusufbekova, etc.). In particular, A. Khutorskoi [24, p. 21] called pedagogical innovations a science that studies the nature, patterns of emergence and development of pedagogical innovations, their connection with traditions of the past and future in relation to the subjects of education. In his opinion, pedagogical innovation studies explore the three-level process — creation, learning and application of innovations. N. Yusufbekova interpreted pedagogical innovation studies as an independent branch of pedagogical science, studies about creation of pedagogical innovations, their evaluation, adoption by the pedagogical community and application in practice [25, p. 12]. N. Bordovska and A. Rean considered the progressive beginning in the development of educational institutions in comparison with the traditions and mass practice as the main parameters of pedagogical innovation studies. In their opinion, innovations in the education system are interrelated with changes in: the purpose, content, methods and technologies, forms of organization and management system; in the style of pedagogical activity and organization of educational and cognitive process; in the system of control and assessment of the level of education; in the financing system; in teaching and learning materials; in the system of educational work; in the curriculum and academic programmes; in the activity of teachers and students [3, p. 123].

Object and subject of educational (pedagogical) innovation studies

The development of pedagogical innovation studies as a scientific filed led to a search in determining its object and subject. For example, in V. Lazarev's opinion the object of pedagogical innovation studies is an innovative process, conditions, methods and results of its implementation, the subject is the relationship between the efficiency of innovation processes and factors determining it, as well as ways of influencing these factors in order to increase the effectiveness of changes [14, p. 16]. A. Khutorskoi expressed the opinion that the object of pedagogical innovation studies cannot be limited only by the innovation process, as it covers other processes and phenomena characteristic for innovations [24, p. 33], and therefore, the object of pedagogical innovation studies is the process of emergence, development and learning of innovations in the education of pupils, students, contributing to the progressive changes in the quality of their education, the subject is a set of pedagogical conditions, tools and laws associated with the development, implementation and adoption of pedagogical innovations in educational practice. A. Khutorskoi was the first to introduce in the subject of pedagogical innovations a system of relationships arising in innovative educational activities aimed at developing a personality of subjects of education — students, teachers, administrators [24, p. 14–15].

Conceptual categorical apparatus of educational innovation studies. The phenomenon of educational innovation has been researched and continues to be developed by the leading Ukrainian scientists, including M. Antonets, A. Boiko, L. Bondar, I. Dychkivska, N. Ditchek, O. Ihnatovych, V. Kurilo, V. Palamarchuk, O. Popova, O. Savchenko, O. Sukhomlinskaia and others. The concepts "innovation" (Latin innovatio — update, change) as "the introduction of the new, modernized" [18, p. 261], "the deliberate introduction of a particular innovation into the existing practice, resulting in positive changes and necessary effects achieved" [23, p. 255] serve the basis for the scientists to substantiate the concepts: "innovative", "innovation", "teacher-innovator", "pedagogical innovation", "innovative pedagogical activity", "pedagogical technology", "advanced (model) pedagogical experience", "introduction of pedagogical experience" [5, p. 19–26; 6, p. 66–75; 11, p. 94–104].

Thus, analysing the processes of pedagogical innovations, V. Palamarchuk differentiates the concepts "novation" and "innovation'. A novation is a result (product) of creative search of a person or team, which opens a fundamentally new phenomenon in science and practice, an innovation is a result of generation, formation and implementation of new ideas. Implementation of new ideas is a sign to distinguish an innovation from a novation itself: if teachers discover a fundamentally new idea, they are novators, if they transform a scientific idea into practice — innovators. According to V. Palamarchuk's approaches, "pedagogical innovations are the result of creative search for original, non-standard solutions to different pedagogical problems" [19, p. 59].

O. Sukhomlynska comments on the concept of “innovative” from two points of view. First, it is “a process of introducing something new, something that was absent in the activity of other educational institutions, which may also concern the content of education, and especially the forms, means and methods of education and upbringing” [17, p. 7]. She proposes to refer such innovations to the best pedagogical experience. Second, a novation is “a fundamentally new approach to defining the general pedagogical conditions of an institution based on a new idea, which fundamentally alters the philosophy of the institution itself or gives birth to a new philosophy of education, shapes a new type of organization, content, direction and forms of activity, implemented in system and integrated innovation programs ”[17, p. 7]. In turn, I. Zaichenko understands “innovations” in pedagogical interpretation as new developments in the pedagogical system, updating, improvement of the course and result of the pedagogical process [10, p. 77]. According to N. Dichek, “if we interpret pedagogical new developments as a process of introducing a novation into educational practice, then a pedagogical innovation is the process of emergence, development and, most importantly, widespread introduction of pedagogical novations and new developments into the educational field.” In her interpretation, “an innovative teacher” is “an author of new pedagogical systems, developer and implementer of educational novations and new developments” [7, p. 64]. A. Boiko views “innovative pedagogical activity” as a kind of pedagogical activity aimed at designing, creating, testing, implementing or disseminating the achievements of pedagogical science, technology, model experience. He notes that innovation can be of theoretical and practical importance, of educational and didactic nature. Based on the author’s vision, “pedagogical activity” is a generic concept in relation to the concept “innovative activity”, which being specific serves as a means of its improvement and successful implementation in modern conditions. In this case, “pedagogical innovations”, by A. Boiko’s definition, are understood in a narrow and broad sense. In the narrow sense, they are some achievements of pedagogical science, didactic and educational technologies, progressive experience that meets the needs of practice. In the broad sense, they may be considered a science of innovations in the field of pedagogical knowledge. In this sense, innovations are the result of pedagogical achievements (science or practice), system, process, technology, methodology, means of training and education, etc. [2, p. 26, 29].

Classifications of educational innovations

The diversity of scientific views in determining the nature of pedagogical innovations in their related scientific direction results in the coexistence of various approaches in typologization and classification of pedagogical innovations, indicating the need for further comprehensive study of this complex phenomenon and systemic understanding of its development. N. Yusufbekova proposes to classify innovations according to the following parameters: place of occurrence (in science or practice); time of occurrence (historical or contemporary); the degree of expectation, forecasting and planning (expected and unexpected, planned and unplanned); possibility of implementation (modern and old-style, easily and difficult to implement); field of pedagogical knowledge (didactic, historical and pedagogical); level of novelty (absolute and relative); degree of transformation of pedagogical processes (radical or partial changes); belonging to the pedagogical system (systemic and non-systemic); originality (original and unoriginal) [25, p. 84–87]. V. Lizinskyi identifies three types of innovations: random (artificial, brought in from outside, often declared from above, and usually doomed to failure), useful (relevant educational missions, unprepared, for an indeterminate purpose, and criteria that do not form one strong unit with the school system) and systemic (derived from the problem field with clearly defined goals and objectives, prepared, provided with the necessary means) [15, p. 80–83]. I. Zaichenko defines low (innovations that suggest a change in the form of unusual names and phrases); middle (imply a change of forms without involving the essence) and high (change of the whole system or its components) levels of the modern process of innovations. In his opinion, the most important areas of innovations in education include: 1) pedagogical system as a whole; 2) educational institutions; 3) pedagogical theory, 4) teacher; 5) those who study; 6) pedagogical technology; 7) content of education; 8) forms, methods, means; 9) management; 10) purpose, objectives, results [10, p. 80]. I. Dychkivska believes that in accordance with the peculiarities of innovative processes, pedagogical innovations cover the following theoretical blocks of concepts and principles: creation of something new in the system of education and pedagogical science; perception of the new by the social and pedagogical community; use of pedagogical innovations, and a system of recommendations for theorists and practitioners to learn about and manage innovative educational processes. The results of pedagogical innovative activity, in her opinion, are divided into pedagogical discoveries, pedagogical inventions, pedagogical improvements that can be rationally combined [8, p. 23–25]. The four main classifications of types of innovations in general and higher education are proposed by A. Rean. The first classification is based on the correlation of the new with the pedagogical process of a particular educational institution. Accordingly, the following types of innovations are distinguished: in the purpose and content of education; in the methods, means, techniques, technologies of the pedagogical process; in the forms and methods of organizing education and upbringing; in the activities of the administration, teachers and students. The second classification of innovations in the education system is based on the application of the sign of scale. There are the following modifications: local and single, unrelated; complex, interconnected; systemic covering the entire school or institution of higher education. The third classification is based on innovation potential. These are modifications of the known and accepted, related to improvement, rationalization, modification (of the curriculum, educational programme, structure); combinatorial innovations; radical changes. The fourth classification of innovations is based on the grouping of signs in relation to their predecessor. This approach includes innovations that replace or cancel previous ones, discover something or retro novations [3, p. 129–130].

Today, the fundamental pedagogical science offers complex organized systematization of pedagogical innovations. For example, A. Khutorskyi systematised them into ten main blocks. Each of them is formed taking into account certain parameters of pedagogical innovations (in relation to the structure of science, subjects of education, conditions of implementation, characteristics of innovations) and differentiates according to their own set of subtypes: 1) regarding the structural elements of educational systems: innovations in goal setting, in tasks, in content of education and upbringing, in forms, methods, techniques, teaching technologies, means of education and training, system of diagnostics, control, evaluation of results, etc.; 2) in relation to the personal formation of the subjects of education: in the field of development of certain abilities of students and teachers, in the sphere of development of their knowledge, skills, methods of activity, competences, etc.; 3) regarding pedagogical use: in the educational process, in the educational course, in the educational field, at the level of the teaching system, the educational system, in the management of education; 4) by the type of interaction of the participants of the pedagogical process: in collective education, in group teaching, in tutoring, coaching, family education, etc.; 5) in terms of functionality: innovations-conditions (provide updates to the educational environment, socio-cultural conditions, etc.), innovations-products (pedagogical tools, projects, technologies, etc.), managerial innovations (new solutions in the structure of educational systems and management procedures, ensuring their functioning); 6) by means of implementation: planned, systematic, periodic, accidental, spontaneous, occasional; 7) in accordance with the scale of distribution: in the activity of one teacher, at school, group of schools, in the region, at the national, international level, etc.; 8) in terms of socio-pedagogical importance: in educational institutions of a certain type, for specific vocational-typological groups of teachers; 9) in terms of innovative measures: local, mass, global, etc.; 10) by the level of anticipated modifications: corrective, modifying, modernizing, radical, revolutionary. In general, in this taxonomy the same innovation can have several characteristics and occupy a certain place in different blocks [12, p. 27–38]. Based on A. Khutorsky's classification, N. Postaliuk proposed the following original division of innovations: 1) depending on the functionality: innovations-conditions that provide for an effective educational process (new content of education, innovative educational environments, socio-cultural conditions, etc.); innovations-products (pedagogical means, technological educational projects); organizational and managerial innovations (qualitatively new decisions in the structure of educational systems and management procedures that ensure their functioning); 2) depending on the field of implementation or introduction: in the content of education; teaching technologies, sphere of educative functions of the educational system; in the structure of interaction of participants of the pedagogical process, in the system of pedagogical means; 3) in terms of scale and social and pedagogical significance: state, regional and subregional or local, intended for educational institutions of a certain type and for specific vocational-typological groups of teachers; 4) on the basis of the intensity of the innovation change or level of innovation. The last criterion allows distinguishing eight ranks or orders of innovations: zero order (regeneration of primary qualities of system or its element); first order (quantitative changes in the system with its constant quality); second order (regrouping of the system elements and organizational changes); third order (adaptation changes of the educational system to new conditions without going beyond the old model of education); fourth order (new solution or simplest qualitative changes in individual components of the educational system); fifth order (creation of "new generation" education systems with changes in all or most of the primary qualities of the system); sixth order (creation of "new kind" educational systems with qualitative changes of functional features and preservation of the system-forming functional principle of the system); the seventh order (a fundamental change in educational systems with a change in the basic functional principle of the system); of the eighth order (emergence of a "new kind" of educational (pedagogical) systems [21, p. 41–50]. The last three ranks in educational practice are extremely rare. They are characterized by truly systemic innovations and can claim the status of innovative educational systems.

Novelty parameter in the typology of educational innovations

It is natural that novelty is recognized as one of the most important parameters in grouping innovations. Thus, V. Polonskyi gives a gradation (level) of novelty, which shows the qualitative difference of the object from the previous ones: 1) construction of the known in another form, that is, actual absence of the new — formal novelty; 2) repetition of the known with insignificant changes; 3) clarification, concretization of what is already known; 4) addition of already known essential elements; 5) creation of a brand new object [20, p. 4–12]. According to N. Bordovska, the following factors should be taken into account in the process of development of the educational system: absolute novelty (no analogues and prototypes), relative novelty and pseudonovelty or so-called inventive trifles [3, p. 124]. N. Borytko considers innovative projects from the point of view of the novelty level as well, specifying the following changes: 1) individual elements, partial refinements, improvements, new details, development of new rules for the use of traditional means; 2) at the level of groups of elements, a combination of known pedagogical means, their combinations, clarification of the sequence of their application; 3) at the level of the whole system of pedagogical means, supplementing this system with new means, development of rules and technologies of their use, emergence of new functional capabilities of the system; 4) a radical change of the whole pedagogical system on a new paradigm basis. According to her justification, according to the novelty levels, programs and projects can be divided into labour-saving, inventive, heuristic and innovative [4, p. 105–111].

The systematic analysis of the above material allows us to rest upon the following main peculiarities of innovations: scope (content of education, methods, technologies, forms, methods, tools, management of education, etc.); innovative potential (modification; combinatorial; radical); scale of transformations (local; modular; systemic) [26, p. 31–37].

Project activities to find and synthesize innovative educational experience

Today, the leading pedagogical universities in the country are laying the groundwork for innovative educational experience in the professional training of future teachers. Thus, the National Pedagogical Dragomanov University has implemented the scientific contextual project "Innovative experimental education systems'. The project included the following main stages: 1) *preparatory* — the Project implementation was preceded by integrated invariant and variational training courses of the Master's Educational and Professional Program 011 Educational, Pedagogical Sciences (Pedagogy of Higher School): "History of Educational Systems of Higher Education", "State Standards and Quality of Higher Education", "Pedagogical Technologies in Higher Education", "Educational Subject–Subject Teacher–Student Relations", "Training of Professional and Pedagogical Competence", etc., implemented using the tutorial technology of the individual support of professional and pedagogical training of a specialist. The teaching of theoretical courses was carried out together with on-the-job training programs and scientific pedagogical practice of undergraduates in the educational institutions of the city of Kyiv, research units of the National Academy of Pedagogical Sciences of Ukraine — institutes of pedagogy, higher education, pedagogical education and adult education; 2) *theoretical and conceptual stage* — discussion of general scientific approaches to the organization of the Project "Innovative Experimental Education Systems" began during the Fifth National Exhibition-Presentation "Innovation in Modern Education", *Kyiv, KyivExpoPlaza*, October 23, 2013 (*Education–2013, November 6–13 — No. 47 (5586).* Theoretical substantiation and conceptual design took place at the 3rd Morozi pedagogical readings "Master's degree in the Educational Space of the University" (2014) (*round table "Educational Innovation in the World Practice of Master's Training", March 14, 2014 // The III All-Ukrainian Moroz Pedagogical Readings. Thematic session "Master's Degree in the Educational Space of the University": Program. — K., National Pedagogical Dragomanov University, March 14–15, 2014*) and the Fifth International Exhibition "Modern Educational Institutions — 2014" (round table of the Department of Pedagogy and Psychology of the Higher School of the National Pedagogical Dragomanov University and All-Ukrainian Public and Political Weekly "Education" "Introducing Pedagogical Innovations in the Educational Process of Higher Education", Kyiv, KyivExpoPlaza, March 20, 2014); 3) *empirical stage — creative missions of the undergraduates* were planned and organized, which involved meeting, interviewing, establishing productive interpersonal communication and cooperation with Ukrainian teachers — authors of innovative educational concepts, technologies, original methods, organizational and managerial models, their students and followers. These missions made it possible to study the unique authorial experience of fifteen educators: Svitlana Vasylivna Bielukha *"Technology of Integrated Multidisciplinary Learning"*; Marianna Ivanovna Bosenko *"Technology of Change of "Pedagogical Process Phenomena"*; Olha Mykhailivna Hnatiuk *"Technology of Collegial Management"*; Mykola Petrovych Huzyk "*Combined System of Organization of Educational Process"*; Zoltan Zoltanovych Zhofchak *"Technology of Systematic Deepening of Musical Education"*; Oleksandr Antonovych Zakharenko *"Personally Oriented Educational System in the Family School"*; Yanina Mykolaivna Ovsiienko *"Technology of Aestheticization of Education and Upbringing"*; Mykola Mykolavych Paltyshev *"Step-by-step Educational System"*; Liudmyla Ivanivna Paraschenko *"System of Management of Development of the School Integrated Educational Environment"*; Nadiia Stepanivna Pushkar *"Project Training Technology"*; Hanna Stefanivna Sazonenko *"Acmeological* *and Activity Model of Organization of Educational Space"*; Serhii Mykhailovych Sichka *"System of Formation of National Consciousness of Pupils"*; Anatolii Ivanovych Solohub *"Technology of Creative Subject-Oriented Training"*; Mykhailo Ivanovych Chemberzhi *"Concept and Model of Comprehensive Music Education"*; Viktor Fedorovych Shatalov *"System of Intensive Training"*. Generalization and systematization of the innovative experience analysed in the framework of the Project made it possible to deduce its following typology: experimental schools — M.P. Huzyk, O.A. Zakharenko, L.I. Parashchenko; experimental pedagogical technologies — S.V. Bielukha, M.I. Bosenko, O.M. Hnatiuk, Z.Z. Zhofchak, Ya.M. Ovsiienko, M.M. Paltyshev, N.S. Pushkar, V.F. Shatalov; 3) experimental models of educational environment — H.S. Sazonenko, S.M. Sichko, A.I. Solohub, M.I. Chemberzhi; 4) *design and implementation*, to be discussed further.

Selection criteria for educational innovations

The basic principle in substantiating the working criteria for selecting achievements of model experience for their further implementation is the ratio of innovation and pedagogical practice. The criteria include: 1) relevance — improving the practice of educational work; 2) time relevance — significance for the present; 3) humanity and focus on the personality — disclosure of the conditions to form humanistic values, to fulfil educational, cultural mission, to promote creative ability and self-affirmation; 4) the innovation readiness and the teacher's methodical preparedness for implementation (programs, textbooks, plans, methodological sheets, recommendations, guidance materials, articles, etc.); 5) continuity with the previous experience and consistency with general trends in the development of the national education system; 6) integrity — a combination of dialectics of the whole and the part; 7) harmonization — specific work on implementing innovations in accordance with the professional and personal qualities of each teacher, improving their competence; 8) efficiency in modern conditions and perspective of the result — awareness of the essence of the new in the specific innovation, taken for introduction (in comparison with existing technologies) [2, p. 160–170].

Scientific findings of A. Boiko, M. Burhin, A. Kopytov, N. Kolominskyi, V. Kraievskyi, M. Skatkin, V. Chepeliev served as a guide in structuring the process of introducing pedagogical experience, which allowed distinguishing its following stages: 1) selection and evaluation of the new; 4) psychological, theoretical and practical training; 5) reporting on the study results; 6) development and provision of methodological materials; 7) clarification of new tasks and demonstration of samples; 8) armed with knowledge and skills; 9) creating model experience; 10) control over implementation; 11) identification and promotion of experience; 12) operative, generalizing stage; 13) final, summary stage; 14) mass introduction [2, p. 179]. These ways to put research into practice (*direct*, when the findings, methods, recommendations are directly addressed to the teacher and can be used in appropriate conditions; *indirect*, according to which the study results are incorporated into theory in one form or another, enrich to some extent and even rebuild it and, becoming part of the theory, both influencing the practice) led to the development of a working scheme for the implementation of scientific developments in practice: 1) theoretical work with educators; 2) practical demonstration of means, methods and techniques of activity; 3) analysis and generalization of the teacher's own experience; 4) propagation it among colleagues [26; 27].

Prospects for the study of educational innovation problems. Interviews with authors of exemplary pedagogical experience, pedagogical teams of educational institutions have showed obstacles to the dissemination of innovative educational activities, including: indifference to the introduction of innovations, even with the awareness of their usefulness; imitation of innovative activity; inconsistency of implementation results with expectations; refusal at the stage of implementation or further use of the introduced innovation, etc. Therefore, we consider it promising to study the problem of "the quality of innovative activity" — the relationship between the necessary, potentially possible and changes that are actually implemented in the educational system of an educational institution. Focusing on available scientific findings [13, p. 120; 14, p. 15–16], we distinguish three main parameters of the quality of innovation: 1) sensitivity to the objective needs for a change, i.e. the ability of the educational institution to identify problems in a timely manner; 2) sensitivity to development opportunities (implementation potential), which is understood as the ability to effectively use identified opportunities to improve a particular educational system; 3) creativity as an educational institution ability to innovate to improve activity. "Evaluation of the quality of innovative activity" as an integrated concept should include: analysis of the state of the pedagogical system and identification of its current problems (problematization); finding opportunities (ways) to solve problems; planning innovations; motivation of performers; implementation of changes (introduction); control and regulation of change processes. Accordingly, the stage-categorical scientific apparatus should be used in solving the problem: 1) "quality of problematization" — a characteristic of innovative activity of an educational institution, which reflects its ability to identify objective actual problems of educational activity and to adequately assess their importance; 2) "quality of search for development opportunities" — a characteristic of the ability of an educational institution to find innovations developed in the science or practice of other educational institutions, and to adequately assess the usefulness and possibility of their use in their own activities; 3) "quality of innovation planning" — a characteristic of the ability of an educational institution to set the goal of its development, corresponding to objective needs and available opportunities, and to develop a system of coordinated actions of the pedagogical team that ensure the effective achievement of this goal; 4) "quality of motivation" — a characteristic of the conditions available in an educational institution in terms of their ability to induce members of the teaching staff to engage in active and productive activities; 5) "quality of implementation (plan implementation)" — a characteristic of the ability of the staff of educational institutions to agree, coordinate actions in the process of change implementation, to efficiently overcome the tension of transformation and to responsibly fulfil the tasks [16, p. 25–32]. From our point of view, all these components of the "quality of innovation" collectively determine the ability of an educational institution to develop, motivating the research interest.

Based on the studied scientific theoretical papers, revealed and generalized innovative experience of teachers — authors of innovative pedagogical experience, the teaching staff of the Department of Pedagogy and Psychology of Higher Education has developed (partly — improved) training courses aimed at preparing future educators for pedagogical innovations: “Educational systems” (university-wide), “Pedagogical innovations in higher education”, “Scientific school and personalized experience in the world educational dimension”, “Partnership communication in education”, “Training of effective interaction in the educational process”, etc. , which are part of the Master’s educational and professional programs “Higher Education Pedagogy: and “Andragogy. Adult Education”, Specialty 011 Educational, Pedagogical Sciences.

Master’s programmes not only form an algorithm, but also understanding of the conditions for successful implementation of innovations in practice: 1) social pedagogical (high competence, social orientation of the teacher’s activity, responsibility and strong awareness of professional functions, education throughout the life); 2) theoretical and practical (combination of conscientious work with innovative ideas of scientists, cooperation of scientists and practitioners, development of a system of increasing the theoretical level of participants of implementation in accordance with the implemented object); 3) scientific and methodological (provision of subjects of implementation with a set of instructional and methodological materials, compliance of methodological developments with the capabilities of a specific staff and individual teacher, systematically organized assistance to the subjects of implementation by management and methodological bodies); 4) moral psychological (orientation of practitioners on the personality, development of a sense of the new, imagination, creativity, moral support and participation in pedagogical search, reasonable combination of insistence on high standards with encouragement in the process of implementation, achievement of “self-movement” and self-formation of the personality) [2, p. 201–202; 27, p. 22–27].

Conclusions

Therefore, generalizing, constructing and implementing innovative pedagogical experience is not a simple and conflict-free process; there is a constant need to identify and overcome natural contradictions between the new and inappropriate modern educational development, to find optimal ways of introducing new approaches to solving educational problems. Hence, it induces the need to systematically inform future educators about findings and achievements in all fields of the organization of the educational process, taking into account local conditions and needs. It is further supported by the results of the creative and experimental master’s project of the National Pedagogical Dragomanov University (Kyiv, Ukraine), which analysed the unique experimental experience of fifteen Ukrainian teachers and allowed: 1) deriving a typology of innovative experience (experimental schools, experimental pedagogical technologies, experimental models of educational environment); 2) justifying the selection criteria for educational innovations (relevance, timeliness, humanity and personality orientation, innovativeness and methodological readiness of the teacher for implementation, continuity with the previous experience and consistency with the general tendencies of development of the educational system, integrity, harmonisation and concretization in accordance with the professional and personal qualities of each teacher, efficiency in modern conditions and long-term results); 3) structuring the process of implementation of pedagogical experience, specifying its stages — from selection and evaluation of the new to creation of exemplary experience and mass introduction. The project showed that educational institutions should not only introduce students to the models of pedagogical innovations, the activity of experimental schools, but also to form their abilities to analyse, summarize, select innovative pedagogical experience, prepare for its purposeful introduction into educational practice.

References

1) Andrushchenk V. P. 2011. Svitanok Yevropy. Problema formuvannia novoho uchytelia dlia obiednanoi Yevropy XXI stolittia Kyiv : Znannia Ukrainy.
2) Boiko A. M. 2011. Uprovadzhennia pedahohichnoi innovatyky v praktyku vykhovannia: monohrafiia / Polt. nats. ped. un-t imeni V.H. Korolenka. Poltava : PNPU imeni V.H. Korolenka.
3) Bordovskaia N. V., Rean A. A. 2007. Pedagogika: uchebnoe posobie. SPb.: Piter.
4) Borytko N. M. 2001. Pedagog v prostranstvakh sovremennogo vospitaniia / nauch. red. N.K. Sergeev. Volgograd : Peremena.
5) Demyanenko N. M. 2014. Pedahohichna innovatyka: vid terminolohichnoho obgruntuvannia do kryteriiv uprovadzhennia. *Problemy osvity* / Instytut innovatsiinykh tekhnolohii i zmistu osvity MON Ukraiiny. Kyiv. 78.1. : 19–26.
6) Demyanenko N .M. 2014. Teoretychni zasady vprovadzhennia pedahohichnykh innovatsii u kontekstnu pidhotovku mahistriv. *Pedahohichni nauky* / Poltavskyi natsionalnyi pedahohichnyi universytet imeni V.H. Korolenka. 60 : 66–75.
7) Dichek N. P. 2012. Poniattievo-terminolohichni osoblyvosti vyvchennia pedahohichnoho novatorstva. *Osvitolohiia: Polsko-ukrainskyi/ ukrainsko-polsky zhurnal.* Varshava — Kyiv: Kyivskyi universytet imeni Borysa Hrinchenka ; Vyshcha pedahohichna shkola Spilky polskykh uchyteliv. 1 : 62–68.
8) Dychkivska I. M. 2004. Innovatsiini pedahohichni tekhnolohii. Kyiv : Akademvydav.
9) Zaichenko I. V. 2010. Istoriia pedahohiky. U dvokh knyhakh. Kn. 1. Istoriia zarubizhnoi pedahohiky. Kyiv : Vydavnychyi Dim “Slovo”.
10) Zaichenko I. V. 2006. Pedahohika. Kyiv : Osvita Ukrainy.
11) Ihnatovych O. 2013. Teoretyko-metodolohichni osnovy pedahohichnoi innovatyky. *Navchannia i vykhovannia obdarovanoi dytyny.* 2. : 94–104.
12) Innovatsii v obrazovanii: chelovekosoobraznyi rakurs. 2009. / pod red. A.V. Khutorskogo. Moskva : TSDO “Eidos”.

13) Lazarev V. S. 2008. Upravlenie innovatsiiami v shkole. Moskva : Tsentr Pedagogicheskogo obrazovaniia.
14) Lazarev V. S., Martirosian B. P. 2004. Pedagogicheskaia innovatika: obiekt, predmet i osnovnye ponyatia. *Pedagogika.* 4 : 11–21.
15) Lizinskii V. M. 2011. Modernizatsiia shkoly ili novaia shkola. Moskva : Pedagogicheskii poisk.
16) Martirosian B. P. 2008. Povyshenie kachestva innovatsionnoi deiatelnosti v obrazovatelnykh uchrezhdeniiakh. *Pedagogika.* 7: 25–32.
17) Narysy z istorii rozvytku novatorskykh navchalno-vykhovnykh zakladiv v Ukraini (kinets XIX–XX st.). 2010. / za red. O.V. Sukhomlynskoi, V.S.Kuryla. Luhansk : Vyd-vo DZ “LNU imeni Tarasa Shevchenka”.
18) Nechvolod L. I. 2009. Suchasnyi slovnyk inshomovnykh sliv. Kharkiv : TORSINH PLIUS.
19) Palamarchuk V. F. 2005. Innovatsiini protsesy v pedahohitsi: pershoosnovy pedahohichnoi innovatyky. Kyiv : Osvita Ukrainy.
20) Polonskiy V. M. 2007. Innovatsii v obrazovanii: (metodologicheskii analiz). *Innovatsii v obrazovanii.* 3 : 4–12.
21) Postaliuk N. Yu. 1989. Tvorcheskii stil deiatelnosti: pedagogicheskii aspect. Kazan : Izd-vo Kazan. un-ta.
22) Savchenko O.Ya. 2008. Avtorska shkola. *Entsyklopediia osvity* / Akad. ped. nauk Ukrainy; holovnyi red. V.H. Kremen. Kyiv : Yurinkom Inter : 8–9.
23) Filosofiia polityky: korotkyi entsyklopedychnyi slovnyk. 2002. / Natsionalna akademiia nauk Ukrainy ; Akademiia pedahohichnykh nauk Ukrainy; Kyivskyi natsionalnyi un-t im. Tarasa Shevchenka ; Avt.-uporiad.: V.P. Andrushchenko, M.I. Boichenko, V.S. Bakirov [ta in.]; za red. L.V. Huberskoho. Kyiv : Znannia Ukrainy.
24) Khutorskoi A. V. 2008. Pedagogicheskaia innovatsiia: uchebnoie posobie dlia studentov vysshikh uchebnykh zavedenii, obuchayushchikhsia p. pedagogicheskoi spetsialnosti. Moskva : Akademiia.
25) Yusufbekova N. R. 1991. Obshchie osnovy pedagogicheskoi innovatiki. Opyt razrabotki teorii innovatsionnykh protsessov v obrazovanii. Moskva : NII teorii i istorii pedagogiki.
26) Demyanenko Nataliia. 2014. Pedagogic innovation: from terminological reasoning to justifying. Neperervna profesiina osvita: teoriia i praktyka. 1–2 : 31–37.
27) Demyanenko N. 2015. Pedagogical innovation in the educational space of university. *Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology.* Budapest, III 26(50) : 22–27.

Музика та музична освіта

Music and musical education

Interdisciplinary Studies of Complex Systems
No. 16 (2020) 105

https://doi.org/10.31392/iscs.2020.16.105

Музика та музична освіта

Від редакції

Міжнародний журнал «Interdisciplinary studies of complex systems» виходить друком понад сім років. Засновниками журналу були українські та зарубіжні математики, фізики, філософи.

Ідеї на яких грунтувався журнал були сформульовані ще першим президентом Української Академії Наук Володимиром Вернадським, — це ідеї про перехід біосфери у ноосферу, про зростання ролі людської думки, про синтез як магістральний шлях розвитку сучасного суспільства.

Завданням журналу було створити майданчик для статей з міждисциплінарних досліджень у галузі природничих наук, історії науки та філософії.

З часом коло наук, що розглядались міждисциплінарними дослідженнями, було розширено та охопило гуманітарні науки, соціологію, психологію, педагогіку.

Сьогодні, коли ми бачимо в Україні брак наукових рецензованих часописів з теорії музики і музичної освіти, а на адресу нашого журналу стали надходити роботи пов'язані з питаннями музичного мистецтва, редколегія журналу вирішила долучити до кола статей, що розглядаються роботи з музики.

Артур Шопенгауер стверджував, що музика виражає квінтесенцію життя та на відміну від інших мистецтв не є відтиск ідей, не є відображенням ідей, а є метафізичне явище безпосередньої ідеї, і, тому є вищою формою пізнання світу. Як і математика. Сучасна класична музика стає все більш ментальною, автори часто нехтують гармонією та мелодією, виключають емоційну складову для безпосереднього донесення ідеї твору. У сучасній музиці все більше прослідковується взаємодія з психологією, лінгвістикою, новими технологіями... Полістилістика в музиці та нові форми вираження і нові методи музичної освіти потребують подальшого філософського осмислення.

Ми маємо надію, що включення до журналу статей з питань музики розширить коло міждисциплінарних досліджень, відкриє нові грані сучасних тенденцій у розвитку науки і мистецтва.

Interdisciplinary Studies of Complex Systems
No. 16 (2020) 106–116

https://doi.org/10.31392/iscs.2020.16.106

Музыка как постижение смыслов

Наталия Кондратьева[1]

Abstract. This article is an essay about composers and music of the twentieth century.

It is about the big experiment to create new musical forms and «thinking in music».

«Если в основе вселенной лежат вибрации, не означает ли это,
что вселенная ведет себя как музыкальный инструмент?»

Стефон Александр «Джаз Физики»

Если рай очертить границей и замкнуть эту границу на замок, то рай может превратиться в ад. Сегодня, когда мир накрыла пандемия нового вируса от которого нет вакцины и страны ввели жесткий карантин для своих граждан, многие получили то, что условно могли называть раем, — можно выспаться, можно сколько хочешь читать книги и смотреть фильмы, заниматься любимыми делами, а если есть сад, бассейн... Но почему-то через две-три недели очень хочется выйти за пределы этого рая и со временем он становится все тягостнее. Сознание начинает обращать внимание на мысли, которые раньше проходили сквозь него не оставляя следа. Начинается поиск новых смыслов.

В 2002 году Артем Варгафтик снял фильм «Альфред Шнитке и красота в музыке». В этом фильме он попытался рассмотреть творчество композитора с точки зрения попытки выйти из «рая» всей известной уже музыки и посмотреть что же находиться за этими границами. Это были поиски новых смыслов...

Принято считать, что современная наука берет свое начало с сэра Исаака Ньютона, его фундаментального труда «Математические начала натуральной философии» («Математические основы физики»), теории тяготения и целого ряда других замечательных его открытий. В сохранившихся тетрадях Ньютона его кембриджского периода видно, что ученый занимался так же теорией музыки как частью математики. В это время великий Иоган Себастиан Бах, используя математику, открыл новые горизонты музыкальных возможностей в полифонии и гармонии, обобщал темперацию.

[1] nkondr24@gmail.com

При дворе Фридриха II Бах впервые играл на новом инструменте, — пианино. И мог встретить там Леонарда Эйлера, который так же рассматривал музыку как часть математики и ввел в нее понятие «градуса красоты» (гармонии).

В то время распространение новых знаний и любой другой информации зависело, как и тысячи лет назад, от количества лошадей в упряжке и ветра под парусом. Но в человеческое сознание все шире входило понятие мысли и идеи, научная мысль способствовала быстрому развитию техники, изобретения изменяли жизнь. Мысль становилась пространством и музыка становилась все более ментальной.

Шопенгауер писал: «Музыка выражает квинтэссэнцию жизни и в отличие от других искусств не есть отражение идей, а есть метафизическое явление непосредственной идеи и, поэтому, есть высшая форма познания мира».

Появление поездов, автомобилей, самолетов, телеграфа, телефона, компьютера изменили мир. Начиналась эпоха, которую Вернадский назвал «От биосферы к ноосфере». И музыка как зеркало времени искала новые формы и новое звучание. В XX веке венские классики во главе с Шенбергом, московские классики второй половины XX века Шнитке, Губайдулина, Денисов, английский композитор Бенджамин Бриттен, американец Филип Гласс, немецкие композиторы Штокхаузен и Лахенманн, французский композитор Ксенакис и итальянский Луиджи Ноно, украинский композитор Сильвестров и целый ряд других композиторов провели грандиозный эксперимент в музыке. Все чаще композиторы через музыку пытались выражать конкретные философские идеи и концепции, все чаще обращались к математике и пытались через «материальную» музыкальную форму найти отражение неслышимой космической музыки...

Альфред Шнитке в своих интервью рассказывал, что сперва он, как и другие студенты консерватории, рассчитывал музыку по формулам и надеялся, что когда будет найдена самая совершенная математическая формула, можно будет создать самое совершенное музыкальное произведение. Но рассчитанная музыка получалась скучной, и если удавалось написать что-то интересное, то это, как правило, было следствием ошибки в расчетах. И только позже, в период большого эмоционального переживания Шнитке впервые «услышал» музыку и записал ее. Произошло то, что в науке известно как озарение. Потом возникло ощущение нахождения все музыки (прошлой, настоящей и будущей) одновременно где-то во вселенной. Эту философскую концепцию он назвал полистилистикой и написал полистилистические произведение, такие, как например, Concerto Grosso №1. Полистилистика заключалась и в синтезе эксперимента, озарений и обращений к «старой» школе.

Музыка все чаще воспринималась как космическое, вселенское явление и наоборот. Наряду с этим часто исчезала мелодия, она приносилась в жертву прямому доступу авторской концепции до слушателя. Часто музыка писалась для музыкантов и была понятна только им. В итоге всех побед и поражений XX век создал подлинные музыкальные шедевры и, проделав большой музыкальный эксперимент обогатил музыкальное искусство новым пониманием мира.

В 2015 году вышла книга Филипа Гласса «Слова без Музыки» («Words without Music»). Выдающийся американский композитор написал эту книгу к своему восьмидесятилетию и в комментарии к этой книги можно прочесть, что Гласс, оглядываясь на свою жизнь видит ее как протянувшееся во времени и пространстве «место музыки», куда можно вернуться как в Балтимор или Индию, и там «думать музыку», так как музыка Филипа Гласса это и есть его мысль и слово.

Композиторы прошлого века часто вынуждены были прибегать к словам, к объяснению своей музыки, т. к. это был единый процесс «думания музыки». Они оставили нам большой архив своих рассуждений о музыке. Этот архив, оставленный музыкантами, большой дар всем нам, он не только позволяет глубже понять их творчество, но и помогает в осознании философского мышления в музыке XX века. Александр Скрябин, Арнольд Шенберг, Антон Веберн, Альфред Шнитке, София Губайдулина, Эдисон Денисов, Валентин Сильвестров,— в своих интервью, записках, статьях и докладах обсуждали ощущения в музыке таких понятий как пространство и время, говорили об особенности музыкального творчества и значении музыки как способа познания новых смыслов и творения новых форм. Из этих «слов без музыки» сегодня можно составить представление и том, как «думали музыку» в XX веке:

АНТОН ВЕБЕРН: «Очевидно, существовала некая потребность, некая необходимость, которая вызвала к жизни то, что мы называем музыкой. Необходимость выразить мысль, которую иначе, чем в звуках не выразить». [1]

ЭДИСОН ДЕНИСОВ: «Музыка может туда проникнуть, куда слово не проникнет». [2]

БЕНДЖАМИН БРИТТЕН: «Когда я создаю музыку, я не мыслю ее в отрыве от идеи». Мысль в XX веке сыграла доселе невиданную роль. Общая теория относительности Эйнштейна заставила по новому осмысливать окружающий нас мир. Пространство получило возможность искривляться, время становиться относительным.

АЛЬФРЕД ШНИТКЕ: «В действительности линейность времени это не линия. Это бесчисленное количество выхваченных из разных пространств точек. И вот возникает такое ощущение бесконечного леса времен, где каждая линия времени — другая, каждое дерево растет по своему. И все, что в прошлом возникло, возникло на деревьях, которые живут и сейчас... У меня есть ощущение сосуществования всех времен и возможности их появления независимо друг от друга абсолютно всегда». [3]

СОФЬЯ ГУБАЙДУЛИНА: «Хочу достичь своей музыкой того, что все хотят достичь. То есть, осуществить настоящее длящееся время, которого в жизни нет. В жизни-то нет настоящего длящегося времени — мы не имеем вообще настоящего времени в жизни, мы все время переходим из прошлого к будущему, а настоящего мы не имеем ни одного мгновения. И это мгновение, по-существу, только в искусстве можно достичь, когда настоящее длится, и оно длится с помощью музыкальной формы». [4]

АЛЬФРЕД ШНИТКЕ: «У меня появилось сейчас то, чего я больше всего всегда хотел: появилась бесконечность каждой секунды». [3]

АЛЕКСАНДР СКРЯБИН: «Вам не кажется, что музыка заколдовывает время, может его вовсе остановить? ... Ритм — заклинание времени. И в этом смысл ритма. Творческий дух посредством ритмов вызывает самое время и управляет им». [5]

В XX веке наука не только исследовала радиоактивность и создала атомную бомбу, ученые открыли «темную» энергию и «темную» материю, которые в сумме занимают до 95% объема Вселенной. Определение «темные» не носит негативного значения, темные — значит неизведанные, недоступные нашему слуху и зрению, мнимые с точки зрения нашего физического восприятия.

Исследование этой мнимой стороны Вселенной началось и в музыке. Начался поиск бесформенной музыкальной субстанции, поиск «звучащей Тишины». (Альфред Шнитке подарил Г. Рождественскому формулу «звучащей Тишины», — фермата над паузой, под которой три форте, — такая длящаяся без ограничения времени очень громкая пауза).

АЛЕКСАНДР СКРЯБИН: «Тишина есть тоже звучание... В тишине есть звук. И пауза звучит всегда... Знаете, я думаю, что может быть даже музыкальное произведение, состоящее из молчания.

Вы не пробовали производить такой опыт. Во время игры представит себе такие дополнительные, воображаемые звуки, как бы мнимые контрапункты? Они очень меняют все отношение к исполняемому... Все как-то по-иному расцветает». [5]

ВАЛЕНТИН СИЛЬВЕСТРОВ: «Музыка должна рождаться из молчания. Музыка — это не то, что звучит, она в структуре молчания. Вот, например, Пятая симфония Бетховена. Ее зачин: та-ра-та-та... та-ра-та-та... — это обычные фигуры, которые бытовали тогда и бытуют сейчас. Но за пределами этой музыки уже было накоплено настолько сильное элекричество молчания, что оно просто прорвало, как молния». [11]

Поиск новых форм, скорее бесформенности (дематериализации) разрушал классические гармонии, выявлявшиеся в созвучных пропорциях. Свободная атональность вела к распаду музыкальной формы. Куда-то уходила красота. Или нарождалась новая?

АРНОЛЬД ШЕНБЕРГ: «Музыка не должна украшать, она должна быть истинной и только...».

Но как истину, т.е. знание более высоких планов бытия, высказать без искажения языками более грубого плана ? «Мысль изреченная есть ложь»?

АЛЕКСАНДР СКРЯБИН: «Творить — значит прежде всего себя ограничивать, никогда творческая греза не может быть облечена до конца в плоть... Творчество есть отпечаток духа на материи, и это достигается только ценой известной жертвы, именно жертвы ограничения».

АЛЬФРЕД ШНИТКЕ: «Одним из очень ярких выражений этой проблемы (невозможности воплотить замысел полностью) явилась опера Шенберга «Моисей и Аарон». Два центральных образа оперы — Моисей, наделенный даром мысли (ему дано слышать и постигать истину, но он не способен ее рассказывать людям), и его брат Аарон, наделенный даром слова (он является «переводчиком» Моисея, интерпретатором и распространителем его мыслей), воплощают по сути две стороны души самого

Шенберга: его стремление к чистой музыкальной мысли, очищенной от материальных, жанрово-семантических признаков, и догматическое миссионерство, требующее «материализованных», переведенных на язык логики конструктивных норм. Именно трагическая невозможность реализации «чистой мысли»,... толкнула его вслед за освободительным порывом в атональность к созданию закрепляющих новую истину заповедей — системы додекафонии.

Что додекафония лишь компромисс, «перемирие», Шенберг отлично осознавал: практически он сам и разбил свои скрижали...».

О додекафонии написано очень много. Если очень кратко, — октава состоит из 12 полутонов. В традиционной европейской музыке используются лады из 7 звуков, с неравными между ними расстояниями: где-то тон, где-то полутон. Это неравенство создает иерархию, в которой одни звуки более устойчивые, другие менее. Эта музыкальная структура отвечает человеческому музыкальному восприятию, основанному на стремлении к определенным консонансным созвучиям, определенным числовым соотношениям. Еще пифагорийцы заметили, что две звучащие струны определяют консонанс, если их длины относятся как целые числа:

1:2 октава
2:3 квинта
3:4 кварта

Семиступенчатая иерархия отвечает некоторой закономерности нашего мира: семь нот музыкальной октавы и семь цветов радуги (основного спектра), семь этажей Вавилонской башни и семь свободных наук Пифагора. ... Даже в химии мы имеем дело с правилом октавы: в 1865 г. английский химик и музыкант Дж. Ньюлендс разместил химические элементы в ряд по возрастанию относительны атомных масс и заметим, что каждый восьмой элемент подобен элементу, от которого производится отсчет. Закономерность, обнаруженную Ньюлендсом, назвали правилом октавы:

H	Li	Be	B	C	N	O	F	Na	Mg	Al	Si	P	S	CL	K	CA
до	ре	ми	фа	соль	ля	си	до	ре	ми	фа	соль	ля	си	до	ре	ми

Надо заметить, что при больших относительных атомных массах правило нарушается. Да и вся наша жизнь по календарю основана на неделях — октавах. Правда, недели составляют 12 месяцев в году, следуя кругу зодиака...

А теперь если представить, что ладовая иерархия отменяется и все 12 полутонов равны (как 12 рыцарей круглого стола) и создать последовательность из 12 неповторяющихся звуков как некоторую структуру? dodeka(греч.) — двенадцать. Ряд вычислений позволяет предположить, что форма Вселенной представляет додекаэдр, приближенный к сфере, отсюда и космические ритмы могут быть связаны с этой структурой. Платон называл додекаэдр символом эфира, того, что сегодня ученые называют «темной» материей. Додекафония — явление не случайное, но ее тайны еще не раскрыты.

Однако, вернемся к поиску истины.

АЛЬФРЕД ШНИТКЕ: «Каждый пытается прорваться к непосредственному выражению некоей слышимой им прамузыки, которая еще не уловлена. Это толкает композитора на поиски новой техники, потому что он хочет с ее помощью услышать то, что в нем звучит. Возникают бесконечные попытки отбросить все условности и создать без них нечто новое... Вот эти многочисленные попытки приблизиться к непосредственному выражению музыки, непрерывное обращение к обертонам, постижение новых рациональных приемов и приближение к истине открывают все новые и новые поля недостижимости. Этот процесс продолжается бесконечно. Поэтому воплощение замысла всегда является и его ограничением». [6]

Сочинить, придумать, рассчитать математически или услышать музыку?

АЛЬФРЕД ШНИТКЕ: (о двойном концерте для гобоя, арфы и струнного оркестра): «Что касается техники, то это не додекафонное сочинение. Все оно основано на использовании прогрессии. Такая прогрессия используется многими — это решето Эратосфена — ряд совершенных чисел, которые делятся только на единицу и на себя...».

АЛЕКСАНДР СКРЯБИН: (о седьмой сонате) «Я всегда признаю, что математика в композиции должна играть большую роль.У меня бывает иногда целое вычисление при сочинении, вычисление формы. И вычисление модуляционного плана. Он не должен быть случайным,— геометрическим, иначе не будет кристаллической формы. Вот схемы как модуляционно тональности движутся сначала по секстам, потом по квинтам, потом по квартам и так далее, все суживая свой «шаг». ...

Мне здесь для формы нужно было два такта. Нужно, чтобы форма получилась как шар, совершенная как кристалл... Шар — это геометрический образ наибольшей завершенности. Это рациональный момент в творчестве». [5]

АЛЬФРЕД ШНИТКЕ:(о «Реквиеме»): «Тут — тихий Sanctus. До середины этой части, во всяком случае, все мне приснилось, это хорошо помню. Это был подарок. И для меня это было очень важным — я этого сам в себе не оспаривал. Вообще, во всем «Реквиеме» было для меня что-то необъяснимое». [7].

Мысль и чувство как электричество и магнетизм, электричество порождает магнетизм и магнетизм порождает электричество. Так мысль порождает чувство и чувство порождает мысль. Все во вселенной двойственно, электрон и позитрон, огонь и вода, радость и горе... И сама Вселенная двойственна — проявленная и мнимая, как порядок и хаос, как день и ночь.

СОФЬЯ ГУБАЙДУЛИНА: «Меня привлекает сейчас идея четвертитонов — выявить в звуковой реальности, разницу между одной настройкой и другой настройкой инструментов. Я уже несколько таких сочинений сделала, потому что мне безумно интересно, функционирует это или нет — с тем, чтобы сделать опять же, обрести, как бы ночь. Дело в том, что наша 12-тоновая настройка, 12-тоновая темперация и наше системное мышление совпадают. И получается, что весь материал как бы светлый — он весь в нашей ментальности, он весь структурирован, все 12 тонов участвуют в звуковой системе. И это все день, это все свет. Мы, как бы потеряли ночь — с моей точки зрения. И это очень плохо для формы крупного сочинения, потому что некуда идти, и нет причины идти. ... Когда мы в музыкальной системе достигли предела — наша музыкальная система охватывает весь 12-тоновый круг, то — некуда идти, и поэтому, например, у Луиджи

Ноно есть произведение под названием «Некуда идти, но надо идти» — вот, чуткий художник, который осознал причину своей музыкальной боли. «Некуда идти, но надо идти!» Это вполне закономерно, если система совпадает со звуковым материалом, то действительно некуда идти. И вот, я думаю о том, нельзя ли получить ночь, то есть, темное пространство куда выйти и затем прийти с помощью удвоения 12-тоновой системы, то есть разной настройки — на четверть тона различающейся. И тогда существует как бы сюжет, где происходит корреспонденция между темным и светлым, между плюсом и минусом, то есть возвращается жизнь...». [4]

ВАЛЕНТИН СИЛЬВЕСТРОВ: «Недавно я разговаривал с Губайдуллиной. Она, Пярт или Кнайфель,— все они опираются в своих композициях на число. Это такая пифагорейская мысль, что в основе мира лежит число. Я же понимаю так: число — это свет. А исходить нужно не из света, а из полной тьмы. Когда ты исходишь из тьмы, ты не знаешь ни сильной доли, ни слабой, ни пропорций,— вообще ничего. Оно-то все, конечно, существует, но ты о нем еще не знаешь. А вот когда начинаешь узнавать, и возникает число. То есть одно дело, когда ты начинаешь с числа, совсем другое когда ты к числу приходишь. Когда текст написан, он и есть число, родившееся из тьмы».

Наверное, можно сказать, что природа Вселенной стоит на «трех китах», которые есть жизнь, сознание, мысль. Музыка — часть природы, ей присуща жизнь, отклик на конкретную ступень эволюции, ее гармонии и свое мышление. Музыка есть язык, имеющий свою развивающуюся структуру, язык при помощи которого идет диалог между человечеством и Вселенной, при этом всегда остается тайна (для человечества).

АНТОН ВЕБЕРН: «Кто хочет приблизится к произведениям большого искусства, тот должен подходить к ним так, как следует подходить к творениям природы, то есть с должным благоговением перед лежащей в их основе тайной... Но познаем ли мы теперь эту тайну или нет, нам должно быть ясно одно, здесь господствует закономерность, и мы должны относиться к этим законам так же, как к законам, которые мы приписываем природе...». [8]

ЭДИСОН ДЕНИСОВ: «Красота мышления в математике имеет такое же значение как и красота мышления в музыке. Музыка из всех искусств есть тот тип человеческого мышления, которое как можно глубже уходит в глубины духа. Музыка в своих высших проявлениях как и математика доходит до некоторой границы — дальше Бог...». [2]

Фундаментальная троица звук-свет(цвет)-число рассматривалась не только в аспекте звук-число, но и в аспекте звук — цвет (закристаллизовавшийся свет).

ЭДИСОН ДЕНИСОВ: «Живопись и музыка очень близки. Организация пространства в живописи и музыке имеют много общего в своей логике. Краска в музыке может быть так же информативна и важна как и другие компоненты,— мелодия, гармония, ритм... Как в живописи наложенная друг на друга краска постепенно приобретает новое качество, так в музыке при сложных микстурах тембр меняется и получается такой особый эффект, совершенно невидимый, неслышимый... Работа с краской очень интересна». [2]

АЛЕКСАНДР СКРЯБИН: «Бемольные тональности имеют какой-то металлический блеск, а диезные — яркие, насыщенные по цвету и без такого металлического блеска. Я всегда различаю их именно по этому цветовому тону.

(О «Прометее): Мне нужен был свет в музыке... мне нужна была лучезарная гармония, которая отображала бы ИДЕЮ СВЕТА. И я ее получил вот по какому соображению. Я рассудил, что чем больше верхних звуков у гармонии, тем она вообще лучезарнее, тем она острее и ослепительнее. Но надо было эти звуки так упорядочить, чтобы это было единственно логичное. Я взял расположенный по терциям обыкновенный терцдецима-аккорд... Но мало накопить эти верхние звуки. Чтобы это было лучезарно, чтобы это отражало идею света, надо чтобы в этом аккорде было наибольшее число повышенных звуков. И вот я повышаю, сначала беру терцию — непременно большую, светлую и мажорную, потом квинту тоже повышаю, потом повышаю и ундециму — вот получился у меня мой аккорд — который весь повышенный и оттого действительно лучезарный.

Должно быть соответствие между светом и звуком — оно необходимо, иначе бессмыслица, нет единства...». [5]

Композиторы искали в музыке звучание бесконечности, вечности, вселенских циклов проявления и растворения космической материи...

АЛЕКСАНДР СКРЯБИН: «В «Прометее» у меня будут такие медленные темпы, как никогда ни у кого не было, медленные как угодно — они должны длиться как вечность, — потому, что ведь это вечность должна пройти от момента томления до полной материализации... У меня будут и такие быстрые темпы, как никогда не были, в самом конце. В этот самый момент и будет созерцание гармонии, и наступит дематериализация, потому что это — одно и тоже».

АЛЬФРЕД ШНИТКЕ: «Раньше мне важна была конечность, материальность, кристальность формы. Сейчас меня больше привлекает ее бесконечность, летучесть, неопределенность».

Дифференциация в области наук и направлений в искусстве в XX веке достигла невиданного масштаба, но сквозь эту дифференциацию уже просвечивалось нагистральное направление XXI века- синтез, поиск Единства. О поиске общих корней всех наук и искусств в начале XX века Василий Кандинский писал: «... мы получаем безусловное подтверждение наших предположений единого корня всех явлений, выходящих на поверхность предельно различными и совершенно оторванными друг от друга. Именно сегодня нам представляется неизбежной необходимость поиска общих корней. Подобная необходимость не появляется на свет без внутреннего основания и потребует столько упорных попыток, сколько будет нужно. Необходимость этого интуитивного свойства. Дальнейшее — это гармоничная связь интуиции и расчета, — ни первой, ни второй по отдельности недостаточно для продолжения пути» [10].

АЛЕКСАНДР СКРЯБИН: «Искусства были когда-то ранее слиты воедино, ведь они потом разъединились. Вот, если нарисовать точку и из нее несколько линий. Вот эти лини — отдельные искусства, выходящие из одной точки, из точки своего слитного состояния. Искусство зависит от космического процесса, оно не само по себе. Космический процесс (эон) приходит к концу, все воссоединяется. Есть такой же пункт воссоединения и в искусстве. Это и есть эта самая Мистерия.Чтобы достигнуть этого пункта воссоединения, мне не надо двигаться по всем линиям, достаточно двигаться по одной из них, и я все равно попаду в эту точку.

...гармония и мелодия — это две стороны одного принципа, одной сущности, они сначала в классической музыке все разъединились — это процесс дифференциации, это падение духа в материю, пока не стала мелодия и сопровождение, как у Бетховена. А теперь у нас начинается синтез: гармония становиться мелодией и мелодия — гармонией... И у меня нет разницы между мелодией и гармонией — это одно и тоже. ...

Мистерия — это кристалл гармонии... когда в насыщенный раствор посадить кристалл, то весь раствор быстро кристаллизуется... В мире, который есть раствор и этот раствор уже насыщен, образуется в одном месте кристалл, где гармония ВСЕГО осуществлена: это и есть Мистерия». [5]

Музыка XX века, обращаясь к мыслям о дальних мирах не могла не отражать положение дел своего времени. На вопрос какое событие вызвало самое сильное переживание, Альфред Шнитке ответил: «Взрывы атомных бомб в Японии».

АНТОН ВЕБЕРН: «Положение в мире становится все более ужасным, особенно в области искусства. А наша задача становится все более огромной».

АРНОЛЬД ШЕНБЕРГ: «Искусство — вопль, который издают люди, переживающие на собственной шкуре судьбу человечества».

Этот полный боли крик души Шенберга, конечно, не может быть определением искусства. Творение искусства — божественный дар человечеству, то, что открывает людям все новую и новую красоту и гармонию мира. Искусство — это творческий труд или Молитва. И в том, что человечество, в целом, выжило в XX веке есть заслуга коллективного творческого труда музыкантов, — их коллективной молитвы и мыслям о мире и красоте в самые трудные периоды человеческой истории.

СОФЬЯ ГУБАЙДУЛИНА: «Моя боль — это разрыв между цивилизацией и культурой... Но я думаю, что искусство — это спасение человечества... Искусство для того и создано, чтобы соединиться с Небом». [9]

В XXI веке музыкальный «рай» включил в себя классику XX века и теперь у музыкантов есть время задуматься о новых смыслах...

24.03.2020

P.S. Сегодня итальянский тенор Адреа Бочелли пел в пустом Кафедральном Соборе Милана, его Концерт назывался «Music for Hope», его слушали одновременно онлайн почти 3 миллиона человек.

Французский тенор Стефан Сенешаль поет из окна для жителей своей улицы в Париже, на балконах Вены играют музыканты ...

Пандемия загадочного вируса, — пустые улицы Нью-Йорка, Лондона, Парижа, Милана, Киева... — музыка как спасение...

12.04.2020

Литература

1) Webern Anton.1960. Der Weg zur Neuen Musik. (vortrag von 27.02.1933). Universal edition https://www.academia.edu/9337835/anton_webern_der_weg_zur_neuen_musik
2) Эдисон Денисов. Преодоление жизни : документальный фильм. 1993. / реж. Татьяна Андреева.
3) Шульгин, Д.И. 1993. Беседы с композитором. Годы неизвестности Альфреда Шнитке. Москва : Из-во Деловая Лига.
4) Губайдулина, С. С моей точка зрения: Интервью Д. Смирнова 9 июня 2001. / [записал] Д. Смирнов. http://website.lineone.net/dmitrismirnov/GubaidRus.html.
5) Сабанеев, Л.Л. 2000. Воспоминания о Скрябине. Москва. (по изданию 1924 г.)
6) Шнитке А. 1982. На пути к воплощению новой идеи. *Проблемы традиций и новаторства в современной музыке.* Москва : Советский композитор. 104–107.
7) Беседы с Альфредом Шнитке 1994. / Соствитель, автор вступ. ст. А. В. Ивашкин. Москва: РИК «Культура»
8) Webern Anton.1960. Der Weg zur Neuen Musik (vortrag von 20.02.1933). Universal edition https://www.academia.edu/9337835/anton_webern_der_weg_zur_neuen_musik
9) Сад радости в мире печали : документальный фильм. 2011 / реж. Андрей Торстенсен.
10) Kandinskij, Vasilij. 1926. Punkt und Linie zu Fleache. Meunchen. A. Langen.
11) Сильвестров, Валентин. 2012. Дождаться музыки (Лекции и беседы с С. Палютиковым). Киев : ДУХ І ЛІТЕРА.

Referenses

1) Webern Anton.1960. Der Weg zur Neuen Musik. (vortrag von 27.02.1933). Universal etdition https://www.academia.edu/9337835/anton_webern_der_weg_zur_neuen_musik
2) Edison Denisov. Preodolenie zhizni : dokumentalnyiy film. 1993 / rezh. Tatyana Andreeva.
3) Shulgin, D.I. 1993. Besedyi s kompozitorom. Godyi neizvestnosti Alfreda Shnitke. Moskva : Iz-vo Delovaya Liga.
4) Gubaydulina, S. S moey tochka zreniya: Intervyu D. Smirnova 9 iyunya. 2001 / [zapisal] D. Smirnov. http://website.lineone.net/dmitrismirnov/GubaidRus.html
5) Sabaneev, L.L. 2000. Vospominaniya o Skryabine. Moskva. (po izdaniyu 1924 g.).
6) Shnitke A. 1982. Na puti k voploscheniyu novoy idei. *Problemyi traditsiy i novatorstva v sovremennoy muzyike.* Moskva : Sovetskiy kompozitor. 104-107.

7) Besedyi s Alfredom Shnitke. 1994 / Sostvitel, avtor vstup.st. A.V. Ivashkin. Moskva: RIK «Kultura».
8) Webern Anton.1960. Der Weg zur Neuen Musik (vortrag von 20.02.1933). Universal etdition https://www.academia.edu/9337835/anton_webern_der_weg_zur_neuen_musik
9) Sad radosti v mire pechali : dokumentalnyiy film, 2011. / rezh. Andrey Torstensen.
10) Kandinskij, Vasilij. 1926. Punkt und Linie zu Fleache. Meunchen. A. Langen.
11) Silvestrov, Valentin. 2012. Dozhdatsya muzyiki (Lektsii i besedyi s S. Palyutikovyim). Kiev : DUH I LITERA.

Зміст

Contents

Тематика та мета журналу

«Міждисципрлінарні дослідження складних систем» — це рецензований журнал із вільним доступом, що публікує дослідницькі статті, огляди, повідомлення, дискусійні листи, історичні та філософські студії в усіх областях теорії складних систем для впровадження взаємодії між науковцями з різних галузей математики, фізики, біології, хімії, інформатики, соціології, економіки та ін. Ми бажаємо запропонувати істотне джерело актуальної інформації про світ складних систем. Журнал має стати частиною наукового форуму, відкритого та цікавого як для експертів з різних областей, так і для широкої аудиторії читачів: від студентів до досвідчених дослідників. Журнал надає можливість для науковців з різних галузей презентувати нові ідеї, гіпотези, піонерські дослідження. Особливо запрошуються до публікації автори наукових статей та (але не тільки) наукових оглядів, проте статті з історії та філософії науки, інформації про наукові події, дискусійні повідомлення також вітаються.

Інформація для авторів

Журнал друкує оригінальні статті, огляди, повідомлення українською, російською, англійською та німецькою мовами. Статті українською та російською мовами мають містити переклад англійською назви статті, анотації та прізвищ авторів.

Статті приймаються виключно в електронному вигляді, файли мають бути підготовлені в LaTeX чи в текстовому процесорі (Microsoft Word, Open Office Writer і т. д.). Інші формати файлів мають бути попередньо узгоджені з редакцією. Ілюстрації мають бути високої якості, графіки та діаграми, що підготовлені в інших програмах, мають подаватися окремо, у висхідному форматі. Журнал друкується чорно-білим, проте у електронній версії матеріали будуть відображені у кольорі.

Статті, запитання, поради мають подаватитися до редакції через реєстрацію на сайті журналу **http://iscs-journal.npu.edu.ua**

Aims and Scope

"Interdisciplinary Studies of Complex Systems" is a peer-reviewed open-access journal, which publishes research articles, reviews, letters, discussions, historical and philosophical studies in all areas of the complex systems theory in order to provide the interaction between scientists working in different areas of Mathematics, Physics, Biology, Chemistry, Computer Science, Sociology, Economics etc. We would like to promote the significant source of up-to-date information on complex systems worldwide. The journal shall be a part of the scientific forum, open and interesting for experts from several areas and for a broad audience from students to senior researchers. The journal shall give a possibility for scientists from different disciplines to present new ideas, conjectures and pioneering developments. The research papers and (but not only) reviews are especially encouraged. At the same time, papers in the history and philosophy of science, information about scientific events, discussion papers will welcome.

To authors

The journal publishes original articles, reviews, information on English, Ukrainian, Russian, and German. Russian and Ukrainian articles should contain English translations of a title, an abstract and authors' names.

The submitted articles should be in an electronic form only. Files should be prepared in LaTeX or in a text-processor program like Microsoft Word, Open Office Writer etc.). Other formats of files might be accepted by the previous agreements with editors only. Pictures should have the high quality, graphs and diagrams which are prepared in external programs must be submitted separately in the original format. The journal is published 'black-and-white' however the electronic version will represent the full color of all materials.

Articles, questions, and advice should be submitted to the editorial office through the registration at the web-site **http://iscs-journal.npu.edu.ua**

Наукове видання

Міждисциплінарні дослідження складних систем

Номер 16

http://iscs-journal.npu.edu.ua

Головний редактор — **В. П. Андрущенко**
Виконавчий редактор — **Ю. Г. Кондратьєв**
Секретар — Л. В. Савенкова
Редагування, коректура — Л. Л. Макаренко
Підготовка оригінал-макету — О. Л. Шаповалова

Підписано до друку 19 травня 2020 р. Формат 70 × 108/16. Папір офсетний. Гарнітура ComputerModern. Друк офсетний. Умовн. друк. аркушів 10,675. Облік. видав. арк. 9,2.

ВИДАВНИЦТВО
Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова.
01030, м. Київ, вул. Пирогова, 9.
Свідоцтво про реєстрацію № 1101 від 29. 10. 2002
(044) тел. 239-30-85