Interdisciplinary Studies of Complex Systems
No. 6 (2015) 5–48

Стохастичні динаміки неперервних систем

Д. Фінкельштейн[1]

Анотація. Стаття являє собою вступ до теорії випадкових (марківських) еволюцій нескінченних систем елементів, розташованих у евклідовому просторі. Розглянуто необхідні теоретичні побудови для дослідження таких еволюцій та наведено відповідний огляд літератури, що включає, зокрема, приклади застосування цієї теорії до численних моделей математичної фізики, біології, екології, медицини, соціології, економіки тощо. Робота є дещо переробленою версією першої частини докторської дисертації автора (д.ф.-м.н., 2014).

Вступ

Протягом декількох останніх десятиліть у різних областях природничих та соціальних наук формується уніфікований підхід до розгляду деяких особливостей систем, які складаються з великої кількості підсистем, що взаємодіють між собою. Це призводить до формування міждисциплінарної галузі науки, яка умовно називається *теорія складних систем.* Вона вимагає взаємопроникнення концепцій та методів, які стосуються як широкого спектру застосувань, так і різноманітних математичних теорій, таких як нескінченновимірний аналіз, статистична фізика, теорія ймовірностей та випадкових процесів, нелінійна динаміка, теорія хаосу, теорія моделювання та багатьох інших. Див., напр., [21, 26, 108, 116] та багато ін.

На сьогодні теорія складних систем розвивається дуже швидко та широко, і навіть сам термін став трактуватися в різний спосіб. Будемо використовувати наступний, досить загальний, але дещо неформальний опис складної системи, як специфічної колекції елементів, що мають так звану колективну поведінку. Останнє означає наявність у системи властивостей, які не є притаманними внутрішній природі кожного окремого елементу. Мабуть, найбільш відомими фізичними прикладами таких властивостей є термодинамічні ефекти, які були основою для створення Л. Больцманом статистичної фізики як математичної мови для вивчення складних систем молекул. Див., напр., [2, 6, 7, 69] та ін.

Припускається, що всі елементи складної системи є ідентичними за властивостями та можливостями. Таким чином, ці елементи можуть бути змодельовані як точки у деякому просторі, а сама складна система — як дискретна множина в цьому просторі. Математично це означає, що для вивчення складних систем можна користуватися мовою та технікою, що були

[1]Факультет математики університету м. Свонсі, Велика Британія

розроблені для моделей взаємодіючих частинок і які формують великий напрямок у сучасному нескінченно-вимірному та стохастичному аналізі, див., напр., [1, 101, 113, 119]. З іншого боку, системи взаємодіючих частинок широко застосовуються у фізиці конденсованих середовищ, хімічній кінетиці, популяційній біології, екології, соціології, економіці тощо, див., напр., [10, 32, 110] та ін. Зокрема, популяція у біології чи екології може бути розглянута як сукупність окремих організмів (точок), що розташовані у відповідному середовищі, див., напр., [100].

Не зважаючи на цілковито різні порядки кількості елементів у реальних фізичних, біологічних, соціальних та інших системах (типова кількість молекул у фізичній системі перевищує 10^{23}, а типова кількість для, скажімо, рослин є порядку 10^4–10^6), складнощі цих систем мають подібні феноменологічні властивості та потребують схожих математичних методів. Одним з них є математична апроксимація великої, але скінченної реальної системи системою нескінченною та ще й реалізованою у нескінченному просторі. Цей підхід був успішно застосований до вивчення термодинамічної границі для моделей статистичної фізики (див., напр., [5] та відповідні посилання звідти) та виявився зручним для, наприклад, екологічного моделювання у нескінченному середовищі (для реалізації ефекту відсутності меж у еволюції популяції, див., напр., [20, 31, 107]).

Таким чином, фазовий простір для математичного опису складної системи має складатися із зліченних підмножин висхідного простору. Цей висхідний простір, в свою чергу, може мати дискретну чи неперервну природу. Звідси виникає розподіл теорії складних систем на два великих класи. Дискретні моделі відповідають системам, чиї елементи можуть розташовуватися тільки на наперед заданій зліченній множині позицій, наприклад, на вершинах ґратки $\mathbb{Z}^d$ або, більш загально, на вершинах якось графу, вкладеного до $\mathbb{R}^d$. Ці моделі широко досліджуються в багатьох монографіях та сотнях наукових публікацій, див., напр., [29, 74, 101, 102] та посилання звідти.

Неперервні моделі (які, мабуть, більш точно було б називати «моделі у неперервності») досліджені, можливо, не настільки інтенсивно та широко. У роботі розглядаються саме неперервні системи, чиї елементи можуть займати довільні позиції в евклідовому просторі $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Розглянуто тільки так звані локально скінченні підмножини простору $\mathbb{R}^d$: це означає, що у довільній обмеженій області допускається наявність тільки скінченної кількості елементів. При цьому розглянуто лише системи із забороною наявності декількох елементів у одній та тій самій позиції у просторі.

Неперервні системи розглядалися в роботах багатьох дослідників, як українських та (пост-)радянських: М. М. Боголюбова, В. І. Герасименка, Р. Л. Добрушина, Є. А. Жижиної, Ю. Г. Кондратьєва, В. П. Маслова, Р. А. Мінлоса, Л. А. Пастура, Д. Я. Петрини, С. А. Пірогова, О. Я. Повзнера, С. К. Погосяна, О. Л. Ребенка, Я. Г. Сіная, В. І. Скрипніка, Ю. М. Сухова, Б. І. Хацета та ін., — так і закордонних: Б. Болкера, Л. Ву, Х.-О. Георгі, Р. Дарретта, А. Ленарда, О. Ленфорда, Р. Лоу, А. де Мазі, О. Оваскайнена, М. Пенроуза, Е. Презутті, Д. Руеля, Д. Струка, М. Фішера, Р. Холлі, К. Черчиньяні, Г. Шпона та ін.

Фазовим простором для неперервної системи, таким чином, виступає простір Γ усіх *конфігурацій* (локально скінченних підмножин $\mathbb{R}^d$). На просторі Γ можуть бути введені топологічні, метричні, вимірні, диференціальні, алгебраїчні структури тощо, що дозволяє розглядати Γ як об'єкт нескінченновимірного аналізу. Відповідні дослідження були розвинуті в роботах С. Альбеверіо, Ю. М. Березанського, А. М. Вєршика, І. М. Гельфанда, М. І. Граєва, Ю. Г. Кондратьєва, Т. Куни, А. Лєнарда, Є. Літвінова, М. Рьокнера та ін. У теорії ймовірностей також вивчаються точкові процеси, що є мірами на просторі конфігурацій.

Серед великого кола задач у теорії складних неперервних систем значне місце займає вивчення різноманітних динамік, пов'язаних із такими системами. Однією з найбільш широко досліджуваних динамік є гамільтонова (детермінова) динаміка, див., напр., [24]. У роботі розглядається інший клас динамік, а саме стохастичні динаміки. Ці динаміки описують зміни системи у часі внаслідок випадкових явищ, що відбуваються з елементами системи: зникнення існуючих елементів системи, поява нових елементів у системі, зміна положення існуючих елементів системи тощо. Інтенсивності з якими відбуваються ці випадкові події нетривіальним чином залежать від всієї системи, тобто розглядаються динаміки із взаємодією. Також ці динаміки є марківськими, в тому сенсі, що майбутнє системи повністю визначається її поведінкою у поточний момент часу. Подібні динаміки розглядалися різними дослідниками, зокрема, в [13, 19, 30, 65, 66, 70, 71, 73, 75, 81, 88, 89, 112, 114, 115].

Суто ймовірнісний підхід до вивчення стохастичних динамік складних систем полягає в побудові та дослідженні марківського процесу на просторі *конфігурацій* (локально скінченних підмножин $\mathbb{R}^d$). Цей підхід на сьогодні частково реалізований або за істотних обмежень на інтенсивності випадкових подій, згаданих вище, див., напр., [65, 66, 112, 115], або за умов розглядання лише скінченних систем (в скінченному чи нескінченному об'ємі), див., напр., [63, 73, 75, 114]. Крім зазначених обмежень, наявні результати не дають відповіді на цілу низку питань важливих для застосувань, таких як статистичні характеристики системи у часі: поведінка щільності системи, оцінки на кореляції старших порядків у системі тощо.

Зважаючи на це, у роботі розглядається інший підхід, який умовно можна назвати «статистичним описом стохастичних динамік неперервних систем». В рамках цього підходу замість динаміки окремих конфігурацій розглядається динаміка їхніх розподілів, тобто ймовірнісних мір на просторі конфігурацій. Виникає нетривіальна задача нескінченновимірного аналізу, яка при цьому є добре узгодженою із потребами застосувань, де саме статистичні характеристики системи відіграють важливу роль для якісного та кількісного аналізу, в той час як детальний аналіз поведінки всіх окремих елементів системи часто є технічно неможливим. Слід також зазначити, що в основі згаданого вище підходу Л. Больцмана якраз і лежала ідея про вивчення статистичної поведінки груп молекул замість дослідження руху окремих молекул.

Крім побудови та дослідження динаміки неперервної системи, традиційно важливим є питання виводу так званих кінетичних (нелінійних) рівнянь, розв'язки яких є наближенням щільності неперервної системи.

Річ у тім, що щільність системи із взаємодією як правило не задовольняє замкненому еволюційному рівнянню, а кінетичне рівняння дозволяє отримати якісні та кількісні властивості свого розв'язку, які є, до певної міри, притаманними висхідній щільності. Такого роду питання активно розглядалися для деяких неперервних систем, див., напр., [12, 24, 68, 75, 124] та ін. Одним з основних напрямків подальшого дослідження є математично строгий вивід відповідних кінетичних рівнянь для розглянутих стохастичних динамік.

Простори конфігурацій (локально скінченних підмножин деякого, наприклад, евклідового, простору) починаючи з 60-х років минулого століття стали предметом досліджень як окремий математичний об'єкт у різних областях математики: функціональному аналізі, математичній фізиці, теорії ймовірностей, топології. Локально скінченні підмножини висхідного простору виявились зручним об'єктом у застосуваннях: фізичних, хімічних, біологічних, економічних, соціальних тощо.

Як вже відзначалось, математичний опис задач статистичної фізики розпочався ще в роботах Л. Больцмана та його послідовників, див., напр., [6, 7]. Роботи Дж. В. Гіббса, див. [4], започаткували сучасну теорію гіббсівських мір на просторах конфігурацій, розвинену Р. Л. Добрушиним, О. Ленфордом та Д. Руелем, див., напр., огляд [5] і відповідні посилання там. Детальне вивчення аналізу на просторах конфігурацій бере свій початок, мабуть, в роботі А. М. Вершика, І. М. Гельфанда та М. І. Граєва [3]. Сучасного вигляду аналіз на просторах конфігурацій набув в роботах С. Альбеверіо, Ю. Г. Кондратьєва, Т. Куни, М. Рьокнера та ін., див., напр., [8, 9, 94, 117]. Надзвичайно важливим для побудови стохастичних динамік на просторах конфігурацій виявився гармонійний аналіз на цих просторах, побудований в [76, 94], див. також [14–16, 78, 79].

У даній роботі, яка має оглядовий характер, ми розглядаємо основні структури на просторах конфігурацій та відповідний гармонійний аналіз, і наводимо математичні формулювання задач про стохастичні динаміки.

1 Простори скінченних конфігурацій

Позначення 1.1. Нехай $d \in \mathbb{N}$ — натуральне число. Введемо позначення:
- ▷ $\mathbb{R}^d$ — d-вимірний евклідів простір над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$;
- ▷ $\mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ — клас всіх відкритих множин у просторі $\mathbb{R}^d$;
- ▷ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ — клас всіх борелівських множин у просторі $\mathbb{R}^d$;
- ▷ $\mathcal{O}_\mathrm{b}(\mathbb{R}^d)$ — клас всіх обмежених множин з $\mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$;
- ▷ $\mathcal{B}_\mathrm{b}(\mathbb{R}^d)$ — клас всіх обмежених множин з $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Означення 1.2. Нехай $Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ та $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Простором усіх *$n$-точкових конфігурацій* над множиною Y називається множина

$$\Gamma_Y^{(n)} := \bigl\{\eta \subset Y \bigm| |\eta| = n\bigr\},\ n \in \mathbb{N}; \qquad \Gamma_Y^{(0)} := \{\emptyset\}.$$

Тут і надалі, символ $|\cdot|$ позначає кількість точок у дискретній множині.

Позначення 1.3. Нехай $Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$, $\Lambda \subset Y$.

- ▷ Позначимо $\eta_\Lambda := \eta \cap \Lambda$.
- ▷ Розглянемо відображення $N_\Lambda : \Gamma_{0,Y}^{(n)} \to \mathbb{N}_0$, що задано наступною формулою: $N_\Lambda(\eta) := |\eta_\Lambda|$.
- ▷ Для $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$\widetilde{Y^n} = \bigl\{(x_1, \dots, x_n) \in Y^n \bigm| x_k \neq x_l, \text{ якщо } k \neq l\bigr\}.$$

- ▷ Для $n \in \mathbb{N}$ розглянемо S_n — групу перестановок над множиною $\{1, \dots, n\}$.

Для $Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $n \in \mathbb{N}$ розглянемо відображення $\mathrm{sym}_{Y,n} : \widetilde{Y^n} \to \Gamma_Y^{(n)}$, що задане наступним чином:

$$\mathrm{sym}_{Y,n}\bigl((x_1, \dots, x_n)\bigr) := \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Відображення $\mathrm{sym}_{Y,n}$ дає змогу ототожнити простір n-точкових конфігурацій $\Gamma_Y^{(n)}$ з симетризацією множини $\widetilde{Y^n}$, тобто з множиною $\widetilde{Y^n}/S_n$. Це дозволяє визначити у просторі $\Gamma_Y^{(n)}$ сім'ю відкритих множин $\mathcal{O}\bigl(\Gamma_{0,Y}^{(n)}\bigr) := \mathrm{sym}_{Y,n}^{-1}\bigl(\mathcal{O}(\widetilde{Y^n})\bigr)$. Базу топології складатиме система множин

$$U_1 \widehat{\times} \cdots \widehat{\times} U_n := \bigl\{\eta \in \Gamma_{0,Y}^{(n)} \bigm| N_{U_1}(\eta) = 1, \dots, N_{U_n}(\eta) = 1\bigr\},$$

де $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{O}_b(\mathbb{R}^d)$, $U_1, \dots, U_n \subset Y$ та $U_i \cap U_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

Наступне твердження доведено в [122, Theorem 1.1].

Твердження 1.4. *Побудована за $\mathcal{O}\bigl(\Gamma_{0,Y}^{(n)}\bigr)$ борелівська σ-алгебра $\mathcal{B}\bigl(\Gamma_Y^{(n)}\bigr)$ співпадатиме з σ-алгеброю, породженою відображеннями N_Λ, а саме*

$$\mathcal{B}\bigl(\Gamma_Y^{(n)}\bigr) = \sigma\bigl(N_\Lambda \mid \Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d), \Lambda \subset Y\bigr).$$

Означення 1.5. Нехай $Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. *Простором скінченних конфігурацій* над множиною Y називається диз'юнктне об'єднання

$$\Gamma_{0,Y} := \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}_0} \Gamma_Y^{(n)}. \tag{1.1}$$

Структура диз'юнктного об'єднання дозволяє визначити на $\Gamma_{0,Y}$ топологію $\mathcal{O}(\Gamma_{0,Y})$. Відповідну борелівську σ-алгебру будемо позначати $\mathcal{B}(\Gamma_{0,Y})$.

Позначення 1.6. У випадку $Y = \mathbb{R}^d$, ми будемо опускати нижній індекс і використовувати позначення

$$\Gamma^{(n)} := \Gamma_{\mathbb{R}^d}^{(n)}, \qquad \Gamma_0 := \Gamma_{0,\mathbb{R}^d}.$$

Означення 1.7. Множина $B \in \mathcal{B}(\Gamma_0)$ називається *обмеженою*, якщо існують такі $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$ та $N \in \mathbb{N}$, що $B \subset \bigsqcup_{n=0}^N \Gamma_\Lambda^{(n)}$. Клас усіх обмежених множин з $\mathcal{B}(\Gamma_0)$ будемо позначати $\mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\Gamma_0)$.

Означення 1.8. Міра ρ на $\bigl(\Gamma_0, \mathcal{B}(\Gamma_0)\bigr)$ називається *локально скінченною*, якщо $\rho(B) < \infty$ для довільної множини $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\Gamma_0)$. Клас усіх локально скінченних мір на $\bigl(\Gamma_0, \mathcal{B}(\Gamma_0)\bigr)$ позначимо $\mathcal{M}_{\mathrm{lf}}(\Gamma_0)$.

Важливим прикладом локально скінченної міри на Γ_0 є міра Лебега—Пуассона, яку ми зараз визначимо. Міру Лебега на $\bigl(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\bigr)$ позначимо

$$dm(x) = dx$$

Міра $m^{(n)}$ на $\mathcal{B}(\Gamma^{(n)})$ визначається як образ продакт-міри $m^{\otimes n}$ на $\widetilde{(\mathbb{R}^d)^n}$ під дією відображення $\mathrm{sym}_{\mathbb{R}^d,n}$. Це означення є коректним, оскільки

$$m^{\otimes n}\bigl((\mathbb{R}^d)^n \setminus \widetilde{(\mathbb{R}^d)^n}\bigr) = 0.$$

При $n = 0$ покладемо

$$m^{(0)}(\{\emptyset\}) := 1.$$

Означення 1.9. Нехай число $z > 0$ задане. *Міра Лебега—Пуассона* λ_z на $\bigl(\Gamma_0, \mathcal{B}(\Gamma_0)\bigr)$ визначається відповідно до розкладу (1.1) наступним чином:

$$\lambda_z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} m^{(n)}. \tag{1.2}$$

Для довільного $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$ звуження міри λ_z на $\Gamma_{0,\Lambda}$ ми будемо також позначати λ_z. Невід'ємне число z називається *інтенсивністю* міри λ_z або її *параметром активності*. При $z = 1$ ми будемо опускати індекс:

$$\lambda := \lambda_1.$$

Зауваження 1.10. В означенні 1.9 міру Лебега m можна замінити на довільну міру Радона σ на $\bigl(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\bigr)$, що не має атомів (є неатомарною), тобто (див. також зауваження 2.9 нижче) $\sigma(\Lambda) < \infty$ для довільного $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$ та $\sigma(\{x\}) = 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}^d$.

Наступне просте твердження має важливі застосування.

Твердження 1.11. *Для довільної множини $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, такої що $m(A) = 0$, виконується рівність:*

$$\lambda\bigl(\{\eta \in \Gamma_{0,Y} \mid \eta \cap A \neq \emptyset\}\bigr) = 0, \qquad Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Доведення, яке, звісно, достатньо провести для $Y = \mathbb{R}^d$, міститься у доведенні [94, Proposition 2.2.8]. Маємо очевидний наслідок.

Наслідок 1.12. *Для довільних $\xi \in \Gamma_0$, $x \in \mathbb{R}^d$*

$$\lambda\bigl(\{\eta \in \Gamma_0 \mid x \in \eta\}\bigr) = \lambda\bigl(\{\eta \in \Gamma_0 \mid \xi \cap \eta \neq \emptyset\}\bigr) = 0.$$

Розглянемо деякі класи функцій[1] на Γ_0. Під вимірною функцією на Γ_0 ми завжди будемо розуміти $\mathcal{B}(\Gamma_0)/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-вимірну функцію.

Позначення 1.13. Відповідно до розкладу (1.1), кожна вимірна функція $G : \Gamma_0 \to \mathbb{R}$ задається системою своїх звужень

$$G^{(n)} := G \restriction_{\Gamma^{(n)}} .$$

[1]Всюди в подальшому, крім випадків, коли це буде явно вказано, ми будемо розглядати лише дійснозначні функції.

Для симетричної функції $G^{(n)} \circ \mathrm{sym}^{-1}_{\mathbb{R}^d,n} : \widetilde{(\mathbb{R}^d)^n} \to \mathbb{R}$ ми будемо використовувати те саме позначення $G^{(n)}$, крім випадків, коли це призведе до непорозуміння.

Означення 1.14. Будемо казати, що вимірна функція G на Γ_0 має *локальний носій*, якщо існує $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$, таке що $G \restriction_{\Gamma_0 \setminus \Gamma_{0,\Lambda}} = 0$. Множину усіх вимірних функцій на Γ_0, що мають локальний носій, ми позначимо $L^0_{\mathrm{ls}}(\Gamma_0)$.

Означення 1.15. Будемо казати, що вимірна функція G на Γ_0 має *обмежений носій*, якщо існує $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\Gamma_0)$, таке що $G \restriction_{\Gamma_0 \setminus B} = 0$. Множину обмежених вимірних функцій на Γ_0, що мають обмежений носій, позначимо $B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0)$.

Для довільної $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-вимірної функції $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ визначимо так звану *експоненту Лебега—Пуассона* — функцію на Γ_0, задану в такий спосіб:

$$e_\lambda(f,\eta) := \prod_{x\in\eta} f(x), \quad \eta \in \Gamma_0 \setminus \{\emptyset\}, \qquad e_\lambda(f,\emptyset) := 1. \tag{1.3}$$

Для довільного $z > 0$ розглянемо простір $L^1(\Gamma_0, \lambda_z) := L^1\big(\Gamma_0, \mathcal{B}(\Gamma_0), d\lambda_z\big)$ функцій, інтегрованих на Γ_0 відносно міри Лебега—Пуассона λ_z.

Твердження 1.16. *Нехай $z > 0$ задане. Справедливі твердження:*
1. *Множина $B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0)$ є щільною у $L^1(\Gamma_0, \lambda_z)$.*
2. *Для довільного $f \in L^1(\mathbb{R}^d, dx)$ маємо $e_\lambda(f) \in L^1(\Gamma_0, \lambda_z)$ і при цьому*

$$\int_{\Gamma_0} e_\lambda(f,\eta)\, d\lambda_z(\eta) = \exp\Big\{ z \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx \Big\}. \tag{1.4}$$

3. *Множина $\big\{ e_\lambda(f) \bigm| f \in L^1(\mathbb{R}^d, dx) \big\}$ є тотальною у $L^1(\Gamma_0, \lambda_z)$*

Доведення. 1. Довільна функція $G \in L^1(\Gamma_0, \lambda_z)$, очевидно, наближається у нормі $\|\cdot\|_z$ простору $L^1(\Gamma_0, \lambda_z)$ послідовністю $G_n = \big(G^{(0)}, G^{(1)}, \ldots, G^{(n)}, 0, \ldots\big)$. Оскільки кожна з $G^{(j)}$, $1 \le j \le n$ є симетричною функцією на $(\mathbb{R}^d)^j$ та належить відповідному простору $L^1\big((\mathbb{R}^d)^j, m^{\otimes j}\big)$, то вона, очевидно, може бути наближена в нормі цього простору деякою послідовністю $\big\{ g_{j,m_{(j)}} \big\}_{m_{(j)} \in \mathbb{N}}$ вимірних симетричних обмежених на $(\mathbb{R}^d)^j$ функцій з компактними носіями (наприклад, індикаторами компактних множин). Тоді послідовність функцій

$$\Big\{ \big(G^{(0)}, g_{1,m_{(1)}}, \ldots, g_{n,m_{(n)}}, 0, \ldots\big) \Big\}_{m_{(1)},\ldots,m_{(n)} \in \mathbb{N}} \tag{1.5}$$

наближає в нормі $\|\cdot\|_z$ функцію G_n, причому для кожної з функцій послідовності (1.5), тобто для кожного фіксованого набору $(m_{(1)}, \ldots, m_{(n)}) \in \mathbb{N}^n$, знайдеться $\Lambda = \Lambda(m_{(1)}, \ldots, m_{(n)}) \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$, яке містить носії усіх функцій $g_{1,m_{(1)}}, \ldots, g_{n,m_{(n)}}$. Таким чином, функції з (1.5) належать $B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0)$, звідки випливає перше твердження.

2. Твердження прямо випливає з (1.3) та (1.2), оскільки

$$\int_{\Gamma_0}\prod_{x\in\eta} f(x)\,d\lambda(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\int_{(\mathbb{R}^d)^n} f(x_1)\dots f(x_n)\,dx_1\dots dx_n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\Bigl(\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx\Bigr)^n = \exp\Bigl\{z\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx\Bigr\}.$$

3. Доведення аналогічне доведенню першого твердження, оскільки довільну інтегровану на $(\mathbb{R}^d)^j$, $j\in\mathbb{N}$ симетричну функцію можна наблизити лінійною комбінацією функцій вигляду $f(x_1)\dots f(x_j)$, $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$. $\square$

Твердження 1.17. *Для довільної* $\mathcal{B}(\Gamma_0\times\Gamma_0\times\Gamma_0)/\mathcal{B}(\mathbb{R})$*-вимірної функції* $H:\Gamma_0\times\Gamma_0\times\Gamma_0\to\mathbb{R}$ *виконується наступна тотожність:*

$$\int_{\Gamma_0}\sum_{\xi\subset\eta} H\left(\xi,\eta\setminus\xi,\eta\right)d\lambda\left(\eta\right) = \int_{\Gamma_0}\int_{\Gamma_0} H\left(\xi,\eta,\eta\cup\xi\right)d\lambda\left(\xi\right)d\lambda\left(\eta\right), \tag{1.6}$$

якщо принаймні один з інтегралів є скінченним для $|H|$.

Доведення одразу випливає, наприклад, з [94, Lemma 2.1.3].

Обравши функцію H, таку що $H(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=0$ при $\xi_1\notin\Gamma^{(1)}$ і довільних $\xi_2,\xi_3\in\Gamma_0$, дістанемо простий наслідок.

Наслідок 1.18. *Для довільної* $\mathcal{B}(\Gamma_0\times\Gamma_0\times\mathbb{R}^d)/\mathcal{B}(\mathbb{R})$*-вимірної функції* $H:\Gamma_0\times\Gamma_0\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ *виконується наступна тотожність:*

$$\int_{\Gamma_0}\sum_{x\in\eta} h(x,\eta\setminus x,\eta)d\lambda(\eta) = \int_{\Gamma_0}\int_{\mathbb{R}^d} h(x,\eta,\eta\cup x)dxd\lambda(\eta), \tag{1.7}$$

якщо принаймні один з інтегралів є скінченним для $|h|$.

2 Простори нескінченних конфігурацій

Означення 2.1. *Простір конфігурацій* Γ над $\mathbb{R}^d$ визначено як множину усіх *локально скінченних підмножин* (*конфігурацій*) з $\mathbb{R}^d$, тобто

$$\Gamma := \bigl\{\gamma\subset\mathbb{R}^d \bigm| |\gamma\cap\Lambda|<\infty \text{ для всіх } \Lambda\in\mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)\bigr\}.$$

Зауваження 2.2. З означення 2.1 випливає, що локально скінченна множина — це не більш ніж зліченна підмножина з $\mathbb{R}^d$, що не має скінченних точок скупчення.

Зауваження 2.3. Очевидно, що Γ_0 є підмножиною множини Γ, проте, як простір, Γ_0 відіграє самостійну роль у всьому подальшому аналізі і розглядається незалежно.

Позначення 2.4. Якщо в означенні 1.5 обрати $Y=\Lambda\in\mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$, ми будемо опускати 0 в індексі, тобто для $\Lambda\in\mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$

$$\Gamma_\Lambda := \Gamma_{0,\Lambda}.$$

Зауваження 2.5. Можна визначити простір Γ_Λ, як такий, що складається з усіх конфігурацій $\gamma \in \Gamma$, які повністю лежать в $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$. З означення 2.1 випливає, що всі такі конфігурації є скінченними. Отже, як множина Γ_Λ співпадатиме з $\Gamma_{0,\Lambda}$. Див. також зауваження 2.10 нижче.

Позначення 2.6. Клас усіх дійснозначних неперервних функцій на $\mathbb{R}^d$ з компактним носієм позначимо $C_0(\mathbb{R}^d)$. Для довільної $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ визначимо *лінійну функцію* на Γ наступною формулою

$$\langle f, \gamma \rangle := \sum_{x \in \gamma} f(x). \tag{2.1}$$

Зауваження 2.7. Зазначимо, що сума в (2.1) насправді береться лише по скінченні множині точок з γ, які лежать всередині обмеженого в $\mathbb{R}^d$ носія функції f.

Означення 2.8. *Грубою топологією* $\mathcal{O}(\Gamma)$ на просторі конфігурацій Γ називається найслабша топологія, відносно якої всі лінійні функції

$$\Gamma \ni \gamma \mapsto \langle f, \gamma \rangle \in \mathbb{R}, \qquad f \in C_0(\mathbb{R}^d)$$

є неперервними.

Зауваження 2.9. Кожну конфігурацію $\gamma \in \Gamma$ можна ототожнити із мірою $\gamma(\cdot) : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}_+$ на $\mathbb{R}^d$, яка є лінійною комбінацією мір Дірака ε_x, $x \in \gamma$:

$$\gamma \leftrightarrow \sum_{x \in \gamma} \varepsilon_x.$$

За означенням 2.1, ця міра є мірою Радона на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, тобто (див. зауваження 1.10)

$$\gamma(A) = \int_A d\gamma(x) = \sum_{x \in \gamma} \int_A d\varepsilon_x(y) = |\gamma \cap A| < \infty, \qquad A \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d).$$

Це дозволяє ізоморфно вкласти простір конфігурацій Γ у простір мір Радона $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ на $\mathbb{R}^d$. Груба топологія $\mathcal{O}(\Gamma)$ при цьому буде індукованою грубою топологією на просторі мір $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, визначеною, напр., в [62, Section 7.3].

Аналогічно позначенню 1.3 покладемо для всіх $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$, $\gamma \in \Gamma$

$$\gamma_\Lambda := \gamma \cap \Lambda.$$

База топології $\mathcal{O}(\Gamma)$ задається системою множин

$$\bigl\{\gamma \in \Gamma \bigm| |\gamma_\Lambda| = n,\ \gamma_{\partial\Lambda} = \emptyset\bigr\},$$

де $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$, $n \in \mathbb{N}_0$ та $\partial\Lambda$ є межею Λ, див., напр., [98]. Ця топологія є сепарабельною та метризованою, див., напр., [105], причому відповідний метричний простір буде повним.

Зауваження 2.10. Зазначимо, що топологія $\mathcal{O}(\Gamma_\Lambda)$, індукована топологією $\mathcal{O}(\Gamma)$, відрізнятиметься від топології $\mathcal{O}(\Gamma_{0,\Lambda})$. При цьому відповідні борелівські σ-алгебри $\mathcal{B}(\Gamma_\Lambda)$ та $\mathcal{B}(\Gamma_{0,\Lambda})$ співпадатимуть (детальніше див., напр., [76]).

Позначення 2.11. Введемо наступні позначення.

- ▷ Борелівську σ-алгебру, відповідну до $\mathcal{O}(\Gamma)$, ми позначимо $\mathcal{B}(\Gamma)$.
- ▷ Аналогічно до позначення 1.3, для довільного $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$ введемо відображення $N_\Lambda : \Gamma \to \mathbb{N}_0$ наступним чином: $N_\Lambda(\gamma) = |\gamma_\Lambda|$.
- ▷ Для довільного $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$ розглянемо відображення $p_\Lambda : \Gamma \to \Gamma_\Lambda$, що задано формулою
$$p_\Lambda(\gamma) := \gamma \cap \Lambda. \tag{2.2}$$

При цьому $\mathcal{B}(\Gamma)$ є мінімальною σ-алгеброю, відносно якої всі відображення N_Λ, $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$ є вимірними, див., напр., [8], тобто

$$\mathcal{B}(\Gamma) = \sigma\bigl(N_\Lambda \bigm| \Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)\bigr).$$

Розглянемо також сім'ю σ-алгебр на Γ, задану наступним чином:

$$\mathcal{B}_\Lambda(\Gamma) := \sigma(N_{\Lambda'} \mid \Lambda' \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d), \Lambda' \subset \Lambda), \qquad \Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d).$$

Зауваження 2.12. Зазначимо, що σ-алгебри $\mathcal{B}_\Lambda(\Gamma)$ та $\mathcal{B}(\Gamma_\Lambda)$ є σ-ізоморфними, див., напр., [76], тобто між ними існує взаємно однозначна відповідність, що зберігає операції над множинами, включаючи зліченні об'єднання.

Означення 2.13. Нехай μ — ймовірнісна міра на $\bigl(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma)\bigr)$, клас всіх таких мір позначимо $\mathcal{M}^1(\Gamma)$. Нехай $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$. *Проекцією* μ^Λ міри μ на вимірний простір $\bigl(\Gamma_\Lambda, \mathcal{B}(\Gamma_\Lambda)\bigr)$ називається образ міри μ під дією відображення (2.2), тобто

$$\mu^\Lambda(A) := \mu\bigl(p_\Lambda^{-1}(A)\bigr), \qquad A \in \mathcal{B}(\Gamma_\Lambda).$$

Означення 2.14. Будемо казати, що ймовірнісна міра μ на $\bigl(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma)\bigr)$ має *скінченні локальні моменти всіх порядків*, якщо для довільних $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$ та $n \in \mathbb{N}_0$

$$\int_\Gamma |\gamma_\Lambda|^n \, d\mu(\gamma) < +\infty.$$

Клас всіх таких мір позначимо $\mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$.

Прикладом міри з локальними скінченними моментами є міра Пуассона. Її можна визначити наступним чином. Нехай $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$, $z > 0$, λ_z — міра Лебега—Пуассона на $\Gamma_\Lambda = \Gamma_{0,\Lambda}$. З (1.2) випливає, що

$$\lambda_z(\Gamma_\Lambda) = e^{zm(\Lambda)}.$$

Розглянемо ймовірнісну міру на $\bigl(\Gamma_\Lambda, \mathcal{B}(\Gamma_\Lambda)\bigr)$, задану формулою

$$\pi_z^\Lambda := e^{-zm(\Lambda)} \lambda_z. \tag{2.3}$$

Для довільних $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$, $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ розглянемо відображення $p_{\Lambda_2,\Lambda_1} : \Gamma_{\Lambda_2} \to \Gamma_{\Lambda_1}$, що задане рівністю

$$p_{\Lambda_2,\Lambda_1}(\eta) = \eta_{\Lambda_1}, \quad \eta \in \Lambda_2.$$

Твердження 2.15. *Нехай $z > 0$. Сім'я мір $\bigl\{\pi_z^\Lambda \bigm| \Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)\bigr\}$ є узгодженою, тобто*

$$\pi_z^{\Lambda_2}\bigl(p_{\Lambda_2,\Lambda_1}^{-1}(A)\bigr) = \pi_z^{\Lambda_1}(A), \qquad A \in \mathcal{B}(\Gamma_{\Lambda_1}), \quad \Lambda_1 \subset \Lambda_2.$$

Доведення. Внаслідок твердження 1.4, σ-алгебра $\mathcal{B}(\Gamma_{\Lambda_1})$ породжується множинами

$$C_{\Lambda_1}(\Lambda, j) := \big\{\gamma \in \Gamma_{\Lambda_1} \;\big|\; |\gamma \cap \Lambda| = j\big\}, \qquad \Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d), \Lambda \subset \Lambda_1, j \in \mathbb{N}_0.$$

Тому достатньо перевірити твердження для $A = C_{\Lambda_1}(\Lambda, j)$, $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$, $\Lambda \subset \Lambda_1$, $j \in \mathbb{N}_0$. Внаслідок (2.3), маємо

$$\pi_z^{\Lambda_2}\big(p_{\Lambda_2,\Lambda_1}^{-1}(A)\big) = e^{-zm(\Lambda_2)} \int_{\Gamma_{\Lambda_2}} 1\!\!1_{\{\gamma \in \Gamma_{\Lambda_2} | \gamma \cap \Lambda_1 \in A\}}\, d\lambda_z(\gamma)$$

$$\stackrel{(1.2)}{=} e^{-zm(\Lambda_2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{(\Lambda_2)^n} 1\!\!1_{\big\{(x_1,\dots,x_n) \in (\Lambda_2)^n | \{x_1,\dots,x_n\} \cap \Lambda_1 \in A\big\}}\, dx_1 \dots dx_n$$

$$= e^{-zm(\Lambda_2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{(\Lambda_2)^n} 1\!\!1_{\big\{\{x_1,\dots,x_n\} \cap \Lambda_1 \in A\big\}}\, dx_1 \dots dx_n$$

$$= e^{-zm(\Lambda_2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{(\Lambda_2)^n} 1\!\!1_{\big\{|\{x_1,\dots,x_n\} \cap \Lambda| = j\big\}}\, dx_1 \dots dx_n$$

(оскільки $(\{x_1, \dots, x_n\} \cap \Lambda_1) \cap \Lambda = \{x_1, \dots, x_n\} \cap \Lambda$)

$$= e^{-zm(\Lambda_2)} \sum_{n=j}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \frac{n!}{j!(n-j)!} \int_{(\Lambda_2)^n} 1\!\!1_{\big\{\{x_1,\dots,x_j\} \subset \Lambda, \{x_{j+1},\dots,x_n\} \cap \Lambda = \emptyset\big\}}\, dx_1 \dots dx_n$$

$$= e^{-zm(\Lambda_2)} \frac{1}{j!} \sum_{n=j}^{\infty} \frac{z^n}{(n-j)!} \big(m(\Lambda_2 \setminus \Lambda)\big)^{n-j} \big(m(\Lambda)\big)^j$$

$$= e^{-zm(\Lambda_2)} \frac{1}{j!} \big(m(\Lambda)\big)^j \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+j}}{n!} \big(m(\Lambda_2 \setminus \Lambda)\big)^n = e^{-zm(\Lambda_2)} \frac{1}{j!} \big(m(\Lambda)\big)^j z^j e^{zm(\Lambda_2 \setminus \Lambda)}$$

$$= e^{-zm(\Lambda)} \frac{z^j}{j!} \big(m(\Lambda)\big)^j.$$

З іншого боку, цілком аналогічно,

$$\pi_z^{\Lambda_1}(A) = e^{-zm(\Lambda_1)} \int_{\Gamma_{\Lambda_1}} 1\!\!1_{\{\gamma \in \Gamma_{\Lambda_1} || \gamma \cap \Lambda| = j\}}\, d\lambda_z(\gamma)$$

$$= e^{-zm(\Lambda_1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{(\Lambda_1)^n} 1\!\!1_{\big\{|\{x_1,\dots,x_n\} \cap \Lambda| = j\big\}}\, dx_1 \dots dx_n$$

$$= e^{-zm(\Lambda_1)} \sum_{n=j}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \frac{n!}{j!(n-j)!} \int_{(\Lambda_1)^n} 1\!\!1_{\big\{\{x_1,\dots,x_j\} \subset \Lambda\big\}}\, dx_1 \dots dx_n$$

$$= e^{-zm(\Lambda_1)} \frac{1}{j!} \sum_{n=j}^{\infty} \frac{z^n}{(n-j)!} \big(m(\Lambda_1 \setminus \Lambda)\big)^{n-j} \big(m(\Lambda)\big)^j$$

$$= e^{-zm(\Lambda_1)} \frac{1}{j!} \big(m(\Lambda)\big)^j \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+j}}{n!} \big(m(\Lambda_1 \setminus \Lambda)\big)^n = e^{-zm(\Lambda_1)} \frac{1}{j!} \big(m(\Lambda)\big)^j z^j e^{zm(\Lambda_1 \setminus \Lambda)}$$

$$= e^{-zm(\Lambda)} \frac{z^j}{j!} \big(m(\Lambda)\big)^j,$$

що доводить твердження. $\square$

Наступне твердження є версією теореми Колмогорова і випливає, напр., з [111, Theorem V.3.2] або [95, Theorem 5.12].

Твердження 2.16. *Нехай $z > 0$. Існує єдина міра π_z на $\bigl(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma)\bigr)$, така що для довільного $\Lambda \in \mathcal{B}_{\rm b}(\mathbb{R}^d)$ міра π_z^Λ, визначена в (2.3), є проекцією міри π_z на $\bigl(\Gamma_\Lambda, \mathcal{B}(\Gamma_\Lambda)\bigr)$. Міра π_z називається* мірою Пуассона *з інтенсивністю (параметром) z на просторі конфігурацій Γ.*

Зауваження 2.17. Важливою властивістю міри Пуассона є так звана тотожність Мекке, яку для пуассонівських процесів, по суті, показав ще Н. Р. Кемпбелл [22, 23]. Вона, насправді, випливає із твердження 2.16 та наслідку 1.18 і стверджує, що для довільної $\mathcal{B}(\Gamma) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-вимірної функції $h : \Gamma \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

$$\int_\Gamma \sum_{x\in\gamma} h(\gamma, x)\, dx\, d\pi_z(\gamma) = z \int_\Gamma \int_{\mathbb{R}^d} h(\gamma \cup x, x)\, dx\, d\pi_z(\gamma), \tag{2.4}$$

якщо тільки хоча б один з інтегралів є скінченним для $|h|$.[1] Й. Мекке в [106] показав, що тотожність (2.4) є необхідною і достатньою умовою того, що π_z є пуассонівською мірою з інтенсивністю $z > 0$.

Означення 2.18. Міра $\mu \in \mathcal{M}^1_{\rm fm}(\Gamma)$ називається *локально абсолютно неперервною відносно міри Пуассона π_z, $z > 0$*, якщо для довільного $\Lambda \in \mathcal{B}_{\rm b}(\mathbb{R}^d)$ проекція μ^Λ міри μ на $\bigl(\Gamma_\Lambda, \mathcal{B}(\Gamma_\Lambda)\bigr)$ є абсолютно неперервною відносно міри π_z^Λ.

Позначення 2.19. Як прямо випливає з означення 2.18, якщо міра $\mu \in \mathcal{M}^1_{\rm fm}(\Gamma)$ є локально абсолютно неперервна відносно міри Пуассона π_{z_0} для деякого $z_0 > 0$, то вона є локально абсолютно неперервною відносно міри Пуассона π_z для довільного $z > 0$. Клас таких мір позначимо $\mathcal{M}^1_{\rm fm,\pi}(\Gamma)$.

Міри, локально абсолютно неперервні відносно міри Пуассона, володіють властивостями аналогічними до властивостей міри Лебега—Пуассона, наведених у твердженні 1.11.

Твердження 2.20. *Нехай міра $\mu \in \mathcal{M}^1_{\rm fm,\pi}(\Gamma)$. Тоді для довільної множини $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, такої що $m(A) = 0$, виконується рівність:*

$$\mu\bigl(\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \cap A \neq \emptyset\}\bigr) = 0.$$

Доведення див., напр., у [94, Proposition 2.2.8].

Наслідок 2.21. *Нехай міра $\mu \in \mathcal{M}^1_{\rm fm,\pi}(\Gamma)$. Тоді*

1. *для довільних $\gamma' \in \Gamma$, $x \in \mathbb{R}^d$*

$$\mu\bigl(\{\gamma \in \Gamma \mid x \in \gamma\}\bigr) = \mu\bigl(\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma' \cap \gamma \neq \emptyset\}\bigr) = 0;$$

2. *множина пар $\bigl\{(\gamma, \gamma') \in \Gamma \times \Gamma \mid \gamma \cap \gamma' \neq \emptyset\bigr\}$ має міру $\mu \otimes \mu$ рівну 0;*
3. *множина пар $\bigl\{(\gamma, x) \in \Gamma \times \mathbb{R}^d \mid x \notin \gamma\bigr\}$ має міру $\mu \otimes m$ рівну 0.*

Доведення див., напр., у [94, Lemma 2.2.7].

[1] Всюди у подальшому для спрощення позначень ми будемо писати $\gamma \cup x$ або $\gamma \setminus x$ замість більш точного $\gamma \cup \{x\}$ чи $\gamma \setminus \{x\}$, відповідно.

Зауваження 2.22. Зазначимо, що при різних інтенсивностях $z_1 \neq z_2$ міри λ_{z_1} та λ_{z_2} на $\big(\Gamma_0, \mathcal{B}(\Gamma_0)\big)$ є абсолютно неперервними одна відносно іншої (тобто еквівалентними), що випливає прямо з означення 1.9. Проте дві міри на $\big(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma)\big)$, локально абсолютно неперервні відносно однієї і тієї ж міри Пуассона, взагалі кажучи, не є абсолютно неперервними. Навіть дві міри Пуассона π_{z_1} та π_{z_2} (які, за (2.3), є локально абсолютно неперервними одна відносно іншої) при $z_1 \neq z_2$ є ортогональними на всьому просторі Γ (див. [123] та узагальнення в [125]).

3 Елементи гармонійного аналізу на просторах конфігурацій

Означення 3.1. Функція $F : \Gamma \to \mathbb{R}$ називається *циліндричною*, якщо існує множина $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$, для якої F є $\mathcal{B}_\Lambda(\Gamma)$-вимірною функцією. Ця властивість характеризується наступною рівністю

$$F(\gamma) = F\restriction_{\Gamma_\Lambda}(\gamma_\Lambda).$$

Клас циліндричних функцій на Γ будемо позначати $\mathcal{F}_{\mathrm{cyl}}(\Gamma)$.

Позначення 3.2. Якщо $\gamma \in \Gamma$ є нескінченною конфігурацією, то запис $\eta \Subset \gamma$ означатиме, що $\eta \subset \gamma$ та $\eta \in \Gamma_0$, тобто η є скінченною підмножиною множини γ.

Означення 3.3. Розглянемо наступне перетворення (див. [76, 98, 99]) $K : L^0_{\mathrm{ls}}(\Gamma_0) \to \mathcal{F}_{\mathrm{cyl}}(\Gamma)$, що задане формулою

$$(KG)(\gamma) := \sum_{\eta \Subset \gamma} G(\eta), \qquad \gamma \in \Gamma, \tag{3.1}$$

де $G \in L^0_{\mathrm{ls}}(\Gamma_0)$.

Зауваження 3.4. З означення 1.14 випливає, що підсумовування в (3.1) ведеться по скінченному набору з усіх підмножин з γ_Λ, де Λ — локальний носій функції $G \in L^0_{\mathrm{ls}}(\Gamma_0)$.

Відображення $K : L^0_{\mathrm{ls}}(\Gamma_0) \to \mathcal{F}_{\mathrm{cyl}}(\Gamma)$ є лінійним, зберігає додатні функції та має обернене (див., напр., [76, Proposition 3.5])

$$(K^{-1}F)(\eta) := \sum_{\xi \subset \eta} (-1)^{|\eta \setminus \xi|} F(\xi), \qquad \eta \in \Gamma_0. \tag{3.2}$$

Зауваження 3.5. В [76, Proposition 3.5] показано, що для $F \in \mathcal{F}_{\mathrm{cyl}}(\Gamma)$ виконується включення $K^{-1}F \in L^0_{\mathrm{ls}}(\Gamma_0)$. Підкреслимо, що права частина формули (3.2) задає коректно визначену вимірну функцію на Γ_0 для довільної вимірної функції F, що визначена на Γ, або навіть на якійсь підмножині з Γ, що містить Γ_0.

Наступне твердження також доведене в [76, Proposition 3.1].

Твердження 3.6. *Нехай $G \in B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0)$. Тоді $KG \in \mathcal{F}_{\mathrm{cyl}}(\Gamma)$, причому існують такі $C > 0$, $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$ та $N \in \mathbb{N}_0$, що функція $F = KG$ задовольняє нерівності*

$$|F(\gamma)| \leq C\bigl(1 + |\gamma_\Lambda|\bigr)^N, \qquad \gamma \in \Gamma. \tag{3.3}$$

Позначення 3.7. Клас циліндричних функцій $F : \Gamma \to \mathbb{R}$, для яких виконана нерівність (3.3), будемо позначати $\mathcal{F}_{\mathrm{pb}}(\Gamma)$. Ці функції називатимемо *(локально) поліноміально обмеженими* на Γ.

Означення 3.8. Нехай $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$. *Кореляційною мірою*, що відповідає мірі μ, називається міра $\rho_\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{lf}}(\Gamma_0)$, визначена рівністю

$$\rho_\mu(A) := \int_\Gamma (K 1\!\!1_A)(\gamma)\, d\mu(\gamma), \qquad A \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\Gamma_0)$$

де $1\!\!1_A : \Gamma_0 \to \mathbb{R}$ — функція-індикатор множини $A \in \mathcal{B}(\Gamma_0)$. Коректність цього означення випливає з [76, Remark 4.7]. Зауважимо, що

$$\rho_\mu(\{\emptyset\}) = 1. \tag{3.4}$$

Наступне твердження доведено в [76, Corollary 4.1].

Твердження 3.9. *Нехай $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$. Тоді для всіх $G \in B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0)$ виконується включення $G \in L^1(\Gamma_0, \rho_\mu)$, причому*

$$\int_{\Gamma_0} G(\eta)\, d\rho_\mu(\eta) = \int_\Gamma (KG)(\gamma)\, d\mu(\gamma). \tag{3.5}$$

Зауваження 3.10. Для довільної невід'ємної $\mathcal{B}(\Gamma_0)$-вимірної функції

$$G : \Gamma_0 \to \mathbb{R}_+ := [0; +\infty)$$

права частина рівності (3.1) визначає $\mathcal{B}(\Gamma)$-вимірну функцію

$$KG : \Gamma \to [0; +\infty].$$

У цьому випадку рівність (3.5) також виконується (див. [76, Corollary 4.1]).

Зауваження 3.11. У [76, Theorem 4.11]) показано, що для $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$ та $G \in L^1(\Gamma_0, \rho_\mu)$ права частина (3.1) визначає μ-майже скрізь (μ-м. с. у подальшому) абсолютно збіжний ряд, причому $KG \in L^1(\Gamma, \mu)$ і виконується рівність (3.5).

Наступне твердження доведено у [76, Proposition 4.14].

Твердження 3.12. *Нехай $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm},\pi}(\Gamma)$. Тоді кореляційна міра ρ_μ є абсолютно неперервною відносно міри Лебега—Пуассона λ на $\bigl(\Gamma_0, \mathcal{B}(\Gamma_0)\bigr)$.*

Означення 3.13. Нехай $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$.

1. Якщо кореляційна міра ρ_μ є абсолютно неперервною відносно міри Лебега—Пуассона λ на $\bigl(\Gamma_0, \mathcal{B}(\Gamma_0)\bigr)$, то відповідна похідна Радона—Нікодима

$$k_\mu(\eta) := \frac{d\rho_\mu}{d\lambda}(\eta), \qquad \eta \in \Gamma_0$$

називається *кореляційним функціоналом* міри μ. З твердження 3.12 випливає, що кореляційний функціонал міри $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm},\pi}(\Gamma)$ завжди існує. Як прямо випливає з (3.4),

$$k_\mu(\emptyset) = 1.$$

2. Функції $k_\mu^{(n)} : (\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{R}_+$, які визначено рівностями

$$k_\mu^{(n)}(x_1,\dots,x_n) := \begin{cases} k_\mu(\{x_1,\dots,x_n\}), & \text{якщо } (x_1,\dots,x_n) \in \widetilde{(\mathbb{R}^d)^n}, \\ 0, & \text{у протилежному випадку,} \end{cases}$$

називаються *кореляційними функціями* міри μ.

Зауваження 3.14. Якщо k_μ — кореляційний функціонал міри $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$, то рівність (3.5) набуває вигляду:

$$\int_{\Gamma_0} G(\eta) k_\mu(\eta)\, d\lambda(\eta) = \int_\Gamma (KG)(\gamma)\, d\mu(\gamma). \tag{3.6}$$

Кореляційні функції інколи визначаються через рівність (3.6), а саме: послідовність вимірних симетричних невід'ємних функцій $k_\mu^{(n)} : (\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$, $k_\mu^{(0)} := 1$ називається системою кореляційних функцій, що відповідають мірі $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$, якщо для довільного $n \in \mathbb{N}_0$ та для довільної вимірної симетричної невід'ємної функції $f^{(n)} : (\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{R}_+$ виконана рівність

$$\int_\Gamma \sum_{\{x_1,\dots,x_n\}\subset\gamma} f^{(n)}(x_1,\dots,x_n)\, d\mu(\gamma) \\ = \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R}^d)^n} f^{(n)}(x_1,\dots,x_n) k_\mu^{(n)}(x_1,\dots,x_n)\, dx_1\dots dx_n.$$

Отже, для довільної міри $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm},\pi}(\Gamma)$ існує відповідна система кореляційних функцій.

Позначення 3.15. Нехай $C > 0$ та $\delta \ge 0$. Розглянемо банаховий простір

$$\mathcal{K}_{C,\delta} = \left\{ k : \Gamma_0 \to \mathbb{R} \;\middle|\; |k(\eta)| \le \mathrm{const} \cdot C^{|\eta|} (|\eta|!)^\delta \text{ для } \lambda\text{-м.в. } \eta \in \Gamma_0 \right\} \tag{3.7}$$

з нормою

$$\|k\|_{\mathcal{K}_{C,\delta}} := \operatorname*{ess\,sup}_{\eta\in\Gamma_0} \frac{|k(\eta)|}{C^{|\eta|}(|\eta|!)^\delta}.$$

Очевидно, при $C' \ge C$, $\delta' \ge \delta$ справедливе включення $\mathcal{K}_{C,\delta} \subset \mathcal{K}_{C',\delta'}$. При $\delta = 0$ будемо опускати цей індекс:

$$\mathcal{K}_C := \mathcal{K}_{C,0}.$$

Зауваження 3.16. Нерівність для $k \in \mathcal{K}_{C,\delta}$ з означення (3.7) будемо називати узагальненою оцінкою Руеля; при $\delta = 0$ вона співпадає з оцінкою отриманою Д. Руелем в [120] для кореляційних функцій міри Гіббса на Γ.

Твердження 3.17. *Нехай* $C > 0$, $\delta \geq 0$, $k \in \mathcal{K}_{C,\delta}$.

1. *Для довільного* $G \in B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0)$

$$\int_{\Gamma_0} |G(\eta)k(\eta)|\, d\lambda(\eta) < \infty.$$

Іншими словами $B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0) \subset L^1(\Gamma_0, |k|\, d\lambda)$.

2. *Нехай* $\delta \in [0;1)$. *Тоді* $e_\lambda(f) \in L^1(\Gamma_0, |k|\, d\lambda)$ *для довільної функції* $f \in L^1(\mathbb{R}^d, dx)$.

Наслідок 3.18. *Нехай* $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$, k_μ *— кореляційна функція міри* μ. *Нехай* $k_\mu \in \mathcal{K}_{C,\delta}$, $C > 0$, $\delta \in [0;1)$. *Тоді для довільної* $f \in L^1(\mathbb{R}^d, dx)$

$$\big(Ke_\lambda(f)\big)(\gamma) = \prod_{x\in\gamma}\big(1 + f(x)\big) \tag{3.8}$$

для μ*-майже всіх (*μ*-м.в. у подальшому)* $\gamma \in \Gamma$. *Зокрема, нескінченний добуток у правій частині* (3.8) *є абсолютно збіжним для* μ*-м.в.* $\gamma \in \Gamma$.

Доведення випливає з твердження 3.17, наслідку 3.11 та безпосереднього підрахунку за означенням 3.3.

Зауваження 3.19. Якщо $f \in C_0(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d, dx)$, то рівність (3.8) виконується для всіх $\gamma \in \Gamma$, пор. з [76, Lemma 5.1].

Зв'язок між кореляційними функціями міри та її проекціями показує наступне твердження. Доведення див., напр., в [76, Propositions 4.2 та 4.3].

Твердження 3.20. *Нехай* $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm},\pi}(\Gamma)$. *Тоді для довільного* $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$, $z > 0$

$$k_\mu(\eta) = \int_{\Gamma_\Lambda} \frac{d\mu^\Lambda}{d\pi^\Lambda_z}(\eta \cup \gamma)\, d\pi^\Lambda_z(\gamma) \tag{3.9}$$

для λ*-м.в.* $\eta \in \Gamma_\Lambda$. *Якщо, додатково, для довільного* $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$

$$\int_{\Gamma_\Lambda} 2^{|\eta|} k_\mu(\eta)\, d\lambda(\eta) < \infty,$$

то

$$\frac{d\mu^\Lambda}{d\pi^\Lambda_z}(\gamma) = \int_{\Gamma_\Lambda} (-1)^{|\eta|} k_\mu(\gamma \cup \eta)\, d\lambda(\eta) \tag{3.10}$$

для π^Λ_z*-м.в.* $\gamma \in \Gamma_\Lambda$.

Обернена задача про можливість відновлення міри $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$ за даною системою симетричних вимірних функцій $k^{(n)}$, для яких $k^{(n)} = k^{(n)}_\mu$, може бути розв'язана за допомогою наступних результатів з [97, 99].

Означення 3.21. Функція $k : \Gamma_0 \to \mathbb{R}$ називається позитивно означеною в сенсі Ленарда, якщо для довільної $G \in B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0)$, такої що $(KG)(\gamma) \geq 0$ для всіх $\gamma \in \Gamma$, виконана нерівність

$$\int_{\Gamma_0} G(\eta)k(\eta)\, d\lambda(\eta) \geq 0. \tag{3.11}$$

Зауваження 3.22. Якщо k_μ — кореляційний функціонал міри $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$, то з рівності (3.6) одразу виливає, що k_μ є позитивно означена в сенсі Ленарда.

Твердження 3.23. *Нехай* $k : \Gamma_0 \to \mathbb{R}$.

1. [99, Theorem 4.1] *Припустимо, що функція* k *є позитивно означеною в сенсі Ленарда та виконана умова нормування*

$$k(\emptyset) = 1. \tag{3.12}$$

Тоді існує принаймні одна міра $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$, *така що* k *є кореляційним функціоналом міри* μ.

2. [97, Theorem 2] *Для довільного* $n \in \mathbb{N}$, $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$ *покладемо*

$$s_n^\Lambda := \frac{1}{n!} \int_{\Lambda^n} k^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n. \tag{3.13}$$

Тоді якщо для всіх $m \in \mathbb{N}$, $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \bigl(s_{n+m}^\Lambda\bigr)^{-\frac{1}{n}} = \infty,$$

то існує не більше однієї міри $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$, *такої що* k *є кореляційним функціоналом міри* μ.

Зауваження 3.24. У роботах [97, 99] А. Ленард досліджував більш широкий простір, ніж простір Γ (так званий простір кратних конфігурацій). Адаптація [99, Theorem 4.1] для випадку простору Γ була проведена в [94, Theorem 4.4.1]. Результат [97, Theorem 2] вочевидь виконується для більш вузького простору Γ.

Наслідок 3.25. *Нехай функція* $k : \Gamma_0 \to \mathbb{R}$ *є позитивно означеною в сенсі Ленарда та виконана умова нормування* (3.12). *Нехай існує* $C > 0$, *таке що* $k \in \mathcal{K}_{C,2}$. *Тоді існує єдина міра* $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$, *така що* k *є кореляційним функціоналом міри* μ.

Доведення. Оскільки $k \in \mathcal{K}_{C,2}$, то для всіх $n \in \mathbb{N}$ з (3.13) маємо

$$s_n^\Lambda \le \mathrm{const} \cdot \bigl(Cm(\Lambda)\bigr)^n n!$$

Отже, для всіх $l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\sum_{n \in \mathbb{N}} \bigl(s_{n+l}^\Lambda\bigr)^{-\frac{1}{n}} &\ge \mathrm{const} \cdot \sum_{n \in \mathbb{N}} \bigl(Cm(\Lambda)\bigr)^{-\frac{n+l}{n}} \bigl((n+l)!\bigr)^{-\frac{1}{n}} \\ &\ge \mathrm{const} \cdot \bigl(Cm(\Lambda)\bigr)^{-(1+l)} \sum_{n \in \mathbb{N}} (n!)^{-\frac{1}{n}} = \infty,\end{aligned}$$

що доводить твердження наслідку. $\square$

Означення 3.26. Введемо наступну згортку між вимірними функціями G_1 та G_2 на Γ_0:

$$(G_1 \star G_2)(\eta) := \sum_{\xi_1 \sqcup \xi_2 \sqcup \xi_3 = \eta} G_1(\xi_1 \cup \xi_2)\, G_2(\xi_2 \cup \xi_3), \tag{3.14}$$

де символ $\sqcup$ означає диз'юнктне об'єднання множин.

Зауваження 3.27. Функція $G_1 \star G_2$, визначена через (3.14), є також вимірною. Більше того, класи функції $L^0_{\mathrm{ls}}(\Gamma_0)$ та $B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0)$ є замкненими відносно операції $\star$, див. [76, Remarks 3.10, 3.12].

Зауваження 3.28. Рівність (3.14) можна записати у наступному вигляді:

$$(G_1 \star G_2)(\eta) := \sum_{\xi_1 \cup \xi_2 = \eta} G_1(\xi_1)\, G_2(\xi_2). \tag{3.15}$$

Наступне твердження показує, що K-перетворення є комбінаторним перетворенням Фур'є відносно $\star$-згортки. Доведення див. в [76, Proposit. 3.11].

Твердження 3.29. *Нехай $G_1, G_2 \in L^0_{\mathrm{ls}}(\Gamma_0)$. Тоді*

$$\big(K(G_1 \star G_2)\big)(\gamma) = (KG_1)(\gamma) \cdot (KG_2)(\gamma), \qquad \gamma \in \Gamma. \tag{3.16}$$

Зауваження 3.30. Нехай $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$, k_μ — кореляційний функціонал міри μ. У [76, Lemma 4.12] показано, що рівність (3.16) виконується для μ-м.в. $\gamma \in \Gamma$, якщо тільки виконана одна з наступних умов: 1) $G_1, G_2 \geq 0$; 2) $|G_1| \star |G_2| \in L^1(\Gamma_0, k_\mu\, d\lambda)$; 3) $G_1, G_2 \in L^1(\Gamma_0, k_\mu\, d\lambda)$.

Наступний наслідок прямо випливає із твердження 3.29, [76, Proposition 3.5] та того факту, що клас функцій $\mathcal{F}_{\mathrm{cyl}}(\Gamma)$ є замкненим відносно множення.

Наслідок 3.31. *Нехай $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_{\mathrm{cyl}}(\Gamma)$. Тоді*

$$\big(K^{-1}(F_1 \cdot F_2)\big)(\eta) = \big((K^{-1}F_1) \star (K^{-1}F_2)\big)(\eta), \qquad \eta \in \Gamma_0. \tag{3.17}$$

Зауваження 3.32. Підкреслимо, що рівність (3.17) справедлива для довільних функцій F_1, F_2, визначених на деякій підмножині простору конфігурацій Γ, що містить множину скінченних конфігурацій Γ_0 (тобто якщо розуміти перетворення K^{-1} в сенсі зауваження 3.5).

Зауваження 3.33. Нехай $G \in B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0)$. З твердження 3.29 випливає, що $K(G \star G) = |KG|^2 \geq 0$. Отже, якщо функція k є позитивно означеною в сенсі Ленарда, то

$$\int_{\Gamma_0} (G \star G)(\eta) k(\eta)\, d\lambda(\eta) \geq 0. \tag{3.18}$$

В [76] показано, що якщо для функції $k \in K_{C,\delta}$, $C > 0$, $\delta \in [0;1)$ виконано (3.18), (3.12), то існує єдина міра $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$, для якої k є її кореляційним функціоналом. Функцію k, для якої виконано (3.18) будемо називати позитивно означеною в сенсі $\star$-згортки.

Іншу згортку функцій на Γ_0 розглядав Д. Руель (див., напр., [118]).

Означення 3.34. Введемо наступну згортку між вимірними функціями G_1 та G_2 на Γ_0:

$$(G_1 * G_2)(\eta) := \sum_{\xi\subset\eta} G_1(\xi)\, G_2(\eta\setminus\xi). \tag{3.19}$$

Зауваження 3.35. Згортку (3.19) можна переписати подібно до (3.15):

$$(G_1 * G_2)(\eta) = \sum_{\xi_1\sqcup\xi_2=\eta} G_1(\xi_1)\, G_2(\xi_2). \tag{3.20}$$

Порівнюючи праві частини (3.20) та (3.20), легко бачити, що сума в означенні $*$-згортки є складовою частиною суми в означенні $\star$-згортки.

Наступна рівність буде часто використовуватися. Вона прямо випливає з (1.3) та (3.19): для довільних вимірних $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

$$e_\lambda(f) * e_\lambda(g) = e_\lambda(f+g). \tag{3.21}$$

Сформулюємо тепер важливий частковий випадок твердження 1.17.

Твердження 3.36. *Для довільних вимірних функцій $H, G_1, G_2 : \Gamma_0 \to \mathbb{R}$ виконується наступна тотожність:*

$$\int_{\Gamma_0} H(\eta)(G_1 * G_2)(\eta)d\lambda(\eta) = \int_{\Gamma_0}\int_{\Gamma_0} H(\eta\cup\xi)G_1(\eta)G_2(\xi)d\lambda(\xi)d\lambda(\eta), \tag{3.22}$$

якщо принаймні один з інтегралів є скінченним для $|G_1|$, $|G_2|$, $|H|$.

Наступне твердження було доведено автором в [36].

Твердження 3.37. *Нехай $C_1, C_2 > 0$, $\delta_1, \delta_2 \geq 0$ і функції $k_i \in \mathcal{K}_{C_i,\delta_i}$, $i = 1, 2$. Тоді функція $k := k_1 * k_2$ належить простору $\mathcal{K}_{C,\delta}$, де*

$$C = C_1 + C_2, \qquad \delta = \max\{\delta_1,\, \delta_2\}.$$

Крім того, виконується наступна нерівність типу Юнга

$$\|k_1 * k_2\|_{C,\delta} \leq \|k_1\|_{C_1,\delta_1} \cdot \|k_2\|_{C_2,\delta_2}.$$

Доведення. Для λ-м.в. $\eta \in \Gamma_0$ маємо

$$\begin{aligned}
&C^{-|\eta|}(|\eta|!)^{-\delta}|k(\eta)| \leq C^{-|\eta|}(|\eta|!)^{-\delta}\sum_{\xi\subset\eta}|k_1(\xi)||k_2(\eta\setminus\xi)| \\
&= C^{-|\eta|}(|\eta|!)^{-\delta}\sum_{\xi\subset\eta} C_1^{|\xi|}(|\xi|!)^{\delta_1}\frac{|k_1(\xi)|}{C_1^{|\xi|}(|\xi|!)^{\delta_1}}\frac{|k_2(\xi)|}{C_2^{|\eta\setminus\xi|}(|\eta\setminus\xi|!)^{\delta_2}}C_2^{|\eta\setminus\xi|}(|\eta\setminus\xi|!)^{\delta_2} \\
&\leq \|k_1\|_{C_1,\delta_1}\|k_2\|_{C_2,\delta_2}C^{-|\eta|}\sum_{k=0}^{|\eta|}\frac{|\eta|!}{k!(|\eta|-k)!}\frac{C_1^k(k!)^{\delta_1}}{(|\eta|!)^{\delta}}C_2^{|\eta|-k}((|\eta|-k)!)^{\delta_2} \\
&\leq \|k_1\|_{C_1,\delta_1}\|k_2\|_{C_2,\delta_2}C^{-|\eta|}\sum_{k=0}^{|\eta|}\left(\frac{|\eta|!}{k!(|\eta|-k)!}\right)^{1-\delta}C_1^kC_2^{|\eta|-k}
\end{aligned}$$

$$\leq \|k_1\|_{C_1,\,\delta_1}\|k_2\|_{C_2,\,\delta_2}C^{-|\eta|}\sum_{k=0}^{|\eta|}\frac{|\eta|!}{k!(|\eta|-k)!}C_1^kC_2^{|\eta|-k}$$
$$= \|k_1\|_{C_1,\,\delta_1}\|k_2\|_{C_2,\,\delta_2},$$

що доводить твердження. □

Деякі подальші властивості $*$-згортки розглянуто в розділі 6 нижче.

4 Функціонали Боголюбова

Позначення 4.1. Нам будуть потрібні наступні позначення.

- ▷ Розглянемо простір $\mathcal{M}^1_{\mathrm{efm}}(\Gamma)$ ймовірнісних мір на $\bigl(\Gamma,\mathcal{B}(\Gamma)\bigr)$, які мають скінченні експоненційні локальні моменти, тобто $\mu\in\mathcal{M}^1_{\mathrm{efm}}(\Gamma)$, якщо для всіх $\alpha>0$, $\Lambda\in\mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$
$$\int_\Gamma e^{\alpha|\gamma_\Lambda|}\,d\mu(\gamma)<\infty.$$
Ясно, що $\mathcal{M}^1_{\mathrm{efm}}(\Gamma)\subset\mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$.
- ▷ Нехай $L^0_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$ — простір вимірних комплекснозначних функцій θ : $\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$.
- ▷ Позначимо $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d):=L^1(\mathbb{R}^d\mapsto\mathbb{C},dx)$. Норму в цьому просторі будемо позначати $\|\cdot\|_{L^1}$.
- ▷ Розглянемо простір $B_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$ комплекснозначних обмежених вимірних функцій на $\mathbb{R}^d$ з компактним носієм. Ясно, що $B_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)\subset L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)\subset L^0_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$.

Означення 4.2. Нехай $\mu\in\mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$. Функціоналом Боголюбова (або твірним функціоналом) міри μ називається відображення $B_\mu : L^0_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{C}$, визначене рівністю

$$B_\mu(\theta):=\int_\Gamma\prod_{x\in\gamma}(1+\theta(x))\,d\mu(\gamma),\qquad \theta\in L^0_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d),$$

якщо тільки

$$\int_\Gamma\prod_{x\in\gamma}(1+|\theta(x)|)\,d\mu(\gamma)<\infty.$$

Зауваження 4.3. Для будь-якою функції $\theta\in B_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$ існують $b>0$ та $\Lambda\in\mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$, такі що $|\theta(x)|\leq b\,1\!\!1_\Lambda(x)$, $x\in\mathbb{R}^d$. Отже, для всіх $\mu\in\mathcal{M}^1_{\mathrm{efm}}(\Gamma)$

$$\bigl|B_\mu(\theta)\bigr|\leq\int_\Gamma\prod_{x\in\gamma}\bigl(1+b\,1\!\!1_\Lambda(x)\bigr)\,d\mu(\gamma)=\int_\Gamma e^{(1+b)|\gamma_\Lambda|}\,d\mu(\gamma)<\infty.$$

Якщо $\mu\in\mathcal{M}^1_{\mathrm{efm}}(\Gamma)$ (або, більш загально, $\mu\in\mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$), то можна переписати функціонал B_μ через кореляційну міру ρ_μ, використавши (3.8) та (3.6):

$$B_\mu(\theta)=\int_\Gamma\bigl(Ke_\lambda(\theta)\bigr)(\gamma)\,d\mu(\gamma)=\int_{\Gamma_0}e_\lambda(\theta,\eta)\,d\rho_\mu(\eta).$$

Якщо ж, додатково, існує кореляційний функціонал k_μ міри μ (наприклад, якщо $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm},\pi}(\Gamma)$), то

$$B_\mu(\theta) = \int_{\Gamma_0} e_\lambda(\theta, \eta) k_\mu(\eta)\, d\lambda(\eta). \tag{4.1}$$

Означення 4.4. 1. Функціонал $A : L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ називається локально обмеженим, якщо для довільного $\theta_0 \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$ існує $r > 0$, таке що

$$\sup_{\|\theta\|_{L^1} \le r} \left| A(\theta_0 + \theta) \right| < \infty. \tag{4.2}$$

2. Функціонал $A : L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ має обмежений тип, якщо нерівність (4.2) виконана для всіх $\theta_0 \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$ і для всіх $r > 0$.
3. Функціонал $A : L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ називається цілим на $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$, якщо він є локально обмеженим і для всіх $\theta_0, \theta \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$ відображення $\mathbb{C} \ni z \mapsto A(\theta_0 + z\theta) \in \mathbb{C}$ є цілим.

Наступне твердження доведено в [79, Theorem 5].

Твердження 4.5. *Нехай A — цілий функціонал на $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$. Тоді для довільного $\theta_0 \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$ коефіцієнти розкладу в ряд Тейлора*

$$A(\theta_0 + z\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} d^n A(\theta_0; \theta, ..., \theta), \quad z \in \mathbb{C}, \theta \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d),$$

тобто диференціали $d^n A(\theta_0; \cdot)$, $n \in \mathbb{N}$ визначаються через симетричні ядра

$$\delta^n A(\theta_0; \cdot) \in L^\infty_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{dn}) := L^\infty\big((\mathbb{R}^d)^n \mapsto \mathbb{C}, (dx)^{\otimes n}\big),$$

які називаються варіаційними похідними n-го порядку функціоналу A в точці θ_0. Більш точно,

$$\begin{aligned} d^n A(\theta_0; \theta_1, \dots, \theta_n) \quad &:= \quad \frac{\partial^n}{\partial z_1 ... \partial z_n} A \left(\theta_0 + \sum_{i=1}^n z_i \theta_i \right) \Bigg|_{z_1 = \ldots = z_n = 0} \\ &=: \quad \int_{(\mathbb{R}^d)^n} dx_1 \dots dx_n\, \delta^n A(\theta_0; x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n \theta_i(x_i) \end{aligned}$$

для всіх $\theta_1, \dots, \theta_n \in L^1$. Більше того, операторна норма обмеженого n-лінійного функціоналу $d^n A(\theta_0; \cdot)$ дорівнює $\|\delta^n A(\theta_0; \cdot)\|_{L^\infty_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{dn})}$, і для всіх $r > 0$ виконані нерівності

$$\|\delta A(\theta_0; \cdot)\|_{L^\infty_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)} \le \frac{1}{r} \sup_{\|\theta'\|_{L^1} \le r} |A(\theta_0 + \theta')|, \tag{4.3}$$

і при $n \ge 2$

$$\|\delta^n A(\theta_0; \cdot)\|_{L^\infty_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{dn})} \le n! \left(\frac{e}{r} \right)^n \sup_{\|\theta'\|_{L^1} \le r} |A(\theta_0 + \theta')|. \tag{4.4}$$

Наслідок 4.6. *Нехай* $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$ *і функціонал Боголюбова* B_μ *є цілим функціоналом на* $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$. *Тоді кореляційна міра* ρ_μ *є абсолютно неперервною відносно міри Лебега—Пуассона* λ *і для кореляційної функції* k_μ *виконується рівність*

$$k_\mu(\eta) = \delta^{|\eta|} B_\mu(0;\eta) \qquad \text{для } \lambda\text{-м.в. } \eta \in \Gamma_0.$$

Зауваження 4.7. Відзначимо, що для довільного цілого функціоналу A праві частини нерівностей (4.3) та (4.4) не обов'язково є скінченними. Але, звісно, вони є скінченними для цілого функціоналу обмеженого типу. Отже, з (4.4) та з наслідку 4.6 випливає, що якщо $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$ і функціонал Боголюбова B_μ є цілим функціоналом обмеженого типу на $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$, то для довільного $r > 0$ кореляційна функція $k_\mu \in \mathcal{K}_{e/r,1}$ (див. (3.7)).

5 Простори конфігурацій різних типів

Метою цього розділу є узагальнення деяких результатів попередніх розділів на випадок просторів конфігурацій різних типів. Для спрощення позначень ми будемо розглядати тільки два типи конфігурацій, які позначимо «+» та «−».

Відповідні динаміки вмотивовані моделями математичної екології, див., напр., [25, 33, 34] та соціоекономіки, а також математичної фізики, зокрема, моделями Відома–Роулінсона та Поттса, див., напр., [27, 28, 67, 68, 93, 96, 121, 126].

Позначення 5.1. Введемо наступні позначення.

- ▷ Розглянемо дві копії простору Γ, $\Gamma^+ := \Gamma$ і $\Gamma^- := \Gamma$, та покладемо $\Gamma^2 := \Gamma^+ \times \Gamma^-$.
- ▷ Нехай $\mathcal{O}(\Gamma^2)$ — продакт-топологія на Γ^2. Відповідну борелівську σ-алгебру позначимо $\mathcal{B}(\Gamma^2)$.
- ▷ Клас усіх ймовірнісних мір на $\bigl(\Gamma^2, \mathcal{B}(\Gamma^2)\bigr)$ позначимо $\mathcal{M}^1(\Gamma^2)$.
- ▷ Аналогічно розглянемо для $Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma^+_{0,Y} := \Gamma^-_{0,Y} := \Gamma_{0,Y}, \quad \Gamma^{+,(n)}_{0,Y} := \Gamma^{-,(n)}_{0,Y} := \Gamma^{(n)}_{0,Y}, \quad \Gamma^2_{0,Y} := \Gamma^+_{0,Y} \times \Gamma^-_{0,Y},$$

  та визначимо відповідні продакт-топологію $\mathcal{O}(\Gamma^2_{0,Y})$ та борелівську σ-алгебру $\mathcal{B}(\Gamma^2_{0,Y})$.
- ▷ Як і раніше, при $Y = \mathbb{R}^d$ будемо опускати символ Y в індексі, а при $Y \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$ будемо опускати 0 в індексі, зокрема,

$$\Gamma^2_0 := \Gamma^2_{0,\mathbb{R}^d}, \qquad \Gamma^2_\Lambda := \Gamma^2_{0,\Lambda}.$$

Зауваження 5.2. Очевидно, що

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\Gamma^2) &= \sigma\bigl(B^+ \times B^- \bigm| B^\pm \in \mathcal{B}(\Gamma^\pm)\bigr); \\ \mathcal{B}(\Gamma^2_{0,Y}) &= \sigma\bigl(B^+ \times B^- \bigm| B^\pm \in \mathcal{B}(\Gamma^\pm_{0,Y})\bigr), \qquad Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \end{aligned}$$

Визначимо деякі поняття, аналогічні до розглянутих вище на просторах конфігурацій одного типу.

Означення 5.3. 1. Для довільних $\Lambda^\pm \in \mathcal{B}_\mathrm{b}(\mathbb{R}^d)$ розглянемо відображення $\mathrm{p}_{\Lambda^+,\Lambda^-} : \Gamma^2 \to \Gamma^+_{\Lambda^+} \times \Gamma^-_{\Lambda^-}$, визначене рівністю

$$\mathrm{p}_{\Lambda^+,\Lambda^-}(\gamma^+,\gamma^-) := \bigl(\gamma^+_{\Lambda^+},\gamma^-_{\Lambda^-}\bigr), \qquad \gamma^\pm \in \Gamma^\pm.$$

Проекцією міри $\mu \in \mathcal{M}^1(\Gamma^2)$ на простір $\bigl(\Gamma^+_{\Lambda^+} \times \Gamma^-_{\Lambda^-}, \mathcal{B}(\Gamma^+_{\Lambda^+} \times \Gamma^-_{\Lambda^-})\bigr)$ називається міра $\mu^{\Lambda^+,\Lambda^-}$, що визначена рівністю

$$\mu^{\Lambda^+,\Lambda^-}(A) := \mu\bigl(\mathrm{p}^{-1}_{\Lambda^+,\Lambda^-}(A)\bigr), \qquad A \in \mathcal{B}(\Gamma^+_{\Lambda^+} \times \Gamma^-_{\Lambda^-}).$$

2. Міра $\mu \in \mathcal{M}^1(\Gamma^2)$ називається локально абсолютно неперервною відносно міри $\pi_z \otimes \pi_z$, $z > 0$, якщо для довільних $\Lambda^\pm \in \mathcal{B}_\mathrm{b}(\mathbb{R}^d)$ проекція $\mu^{\Lambda^+,\Lambda^-}$ міри μ є абсолютно неперервною до міри $\pi_z^{\Lambda^+} \otimes \pi_z^{\Lambda^-}$ на просторі $\bigl(\Gamma^+_{\Lambda^+} \times \Gamma^-_{\Lambda^-}, \mathcal{B}(\Gamma^+_{\Lambda^+} \times \Gamma^-_{\Lambda^-})\bigr)$.
3. У випадку, коли $\Lambda^+ = \Lambda^- = \Lambda \in \mathcal{B}_\mathrm{b}(\mathbb{R}^d)$ будемо писати $\mathrm{p}_\Lambda, \mu^\Lambda, \Gamma^2_\Lambda$ замість $\mathrm{p}_{\Lambda,\Lambda}, \mu^{\Lambda,\Lambda}, \Gamma^+_\Lambda \times \Gamma^-_\Lambda$, відповідно, якщо тільки це не призведе до непорозуміння.

Наступне твердження є ключовим для подальшого аналізу на просторах конфігурацій різних типів. Воно є узагальненням другого твердження з наслідку 2.21.

Твердження 5.4. *Нехай міра $\mu \in \mathcal{M}^1(\Gamma^2)$ є локально абсолютно неперервною відносно міри $\pi_z \otimes \pi_z$, $z > 0$. Розглянемо множину*

$$\widetilde{\Gamma}^2 := \bigl\{(\gamma^+,\gamma^-) \in \Gamma^2 \bigm| \gamma^+ \cap \gamma^- = \emptyset\bigr\}.$$

Тоді $\mu(\widetilde{\Gamma}^2) = 1$.

Доведення. Розглянемо послідовність $\{\Lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}_\mathrm{b}(\mathbb{R}^d)$, таку що $\mathbb{R}^d = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Lambda_j$. Розкладемо множину $\Gamma^2 \setminus \widetilde{\Gamma}^2$ наступним чином

$$\Gamma^2 \setminus \widetilde{\Gamma}^2 = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{p}^{-1}_{\Lambda_j}\bigl\{(\gamma^+,\gamma^-) \in \Gamma^2_{\Lambda_j} \bigm| \gamma^+ \cap \gamma^- \neq \emptyset\bigr\}.$$

Тоді, очевидно,

$$\mu\bigl(\Gamma^2 \setminus \widetilde{\Gamma}^2\bigr) \le \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu^{\Lambda_j}\Bigl(\bigl\{(\gamma^+,\gamma^-) \in \Gamma^2_{\Lambda_j} \bigm| \gamma^+ \cap \gamma^- \neq \emptyset\bigr\}\Bigr).$$

Оскільки міра μ^{Λ_j} абсолютно неперервна відносно $\lambda_z \otimes \lambda_z$ на $\bigl(\Gamma^2_{\Lambda_j}, \mathcal{B}(\Gamma^2_{\Lambda_j})\bigr)$, для доведення твердження нам досить показати, що

$$(\lambda_z \otimes \lambda_z)\Bigl(\bigl\{(\gamma^+,\gamma^-) \in \Gamma^2_{\Lambda_j} \bigm| \gamma^+ \cap \gamma^- \neq \emptyset\bigr\}\Bigr) = 0. \tag{5.1}$$

Для довільного $\gamma^+ \in \Gamma^+_{\Lambda_j}$ покладемо

$$A_{\gamma^+} := \bigl\{\gamma^- \in \Gamma^-_{\Lambda_j} \bigm| \gamma^+ \cap \gamma^- \neq \emptyset\bigr\}.$$

Звідси маємо оцінку

$$\lambda_z(A_{\gamma^+}) \le \sum_{x\in\gamma^+} \lambda_z\Bigl(\bigl\{\gamma^- \in \Gamma^-_{\Lambda_j} \bigm| x \in \gamma^-\bigr\}\Bigr) = 0. \tag{5.2}$$

Оскільки

$$(\lambda_z \otimes \lambda_z)\Big(\big\{(\gamma^+, \gamma^-) \in \Gamma^2_{\Lambda_j} \bigm| \gamma^+ \cap \gamma^- \neq \emptyset\big\}\Big) = \int_{\Gamma^+_{\Lambda_j}} \lambda_z(A_{\gamma^+}) d\lambda_z(\gamma^+),$$

то (5.1) випливає з (5.2). □

Твердження 5.5. *Нехай міра* $\mu \in \mathcal{M}^1(\Gamma^2)$ *є локально абсолютно неперервною відносно міри* $\pi_z \otimes \pi_z$*,* $z > 0$*. Нехай* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$*,* $m(A) = 0$*. Розглянемо множину*

$$B := \big\{(\gamma^+, \gamma^-) \in \Gamma^2 \bigm| \gamma^- \cap A \neq \emptyset\big\}.$$

Тоді $\mu(B) = 0$*.*

Доведення. Аналогічно доведенню твердження 5.4 дістанемо, що достатньо для довільного $j \in \mathbb{N}$ довести, що

$$(\lambda_z \otimes \lambda_z)\Big(\big\{(\gamma^+, \gamma^-) \in \Gamma^2_{\Lambda_j} \bigm| x \in A \text{ для деякого } x \in \gamma^-\big\}\Big) = 0. \qquad (5.3)$$

Але ліва частина (5.3) дорівнює

$$\begin{aligned} &\lambda_z(\Gamma^+_{\Lambda_j}) \cdot \lambda_z\Big(\big\{\gamma^- \in \Gamma^-_{\Lambda_j} \bigm| x \in A \text{ для деякого } x \in \gamma^-\big\}\Big) \\ = \;& e^{zm(\Lambda_j)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} m^{\otimes}\Big(\big\{(x_1, \ldots, x_n) \in (\Lambda_j)^n \bigm| x_i \in A \text{ для деякого } i\big\}\Big) = 0. \end{aligned}$$

Твердження доведено. □

Наслідок 5.6. *Нехай міра* $\mu \in \mathcal{M}^1(\Gamma^2)$ *є локально абсолютно неперервною відносно міри* $\pi_z \otimes \pi_z$*,* $z > 0$*. Тоді множина*

$$\big\{(\gamma^+, \gamma^-, x) \in \Gamma^2 \times \mathbb{R}^d \bigm| x \in \gamma^+\big\}$$

має міру $\mu \otimes m$ *рівну* 0*.*

Означення 5.7. Нехай $\mu \in \mathcal{M}^1(\Gamma^2)$. Маргінальними розподілами міри μ будемо називати ймовірнісні міри $\mu^\pm$ на $\big(\Gamma^\pm, \mathcal{B}(\Gamma^\pm)\big)$, відповідно, що визначені співвідношеннями

$$\mu^\pm(A^\pm) := \int_{A^\pm} \int_{\Gamma^\mp} d\mu(\gamma^+, \gamma^-), \qquad A^\pm \in \mathcal{B}(\Gamma^\pm). \qquad (5.4)$$

Зауваження 5.8. Нехай $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$, μ^Λ — проекція міри $\mu \in \mathcal{M}^1(\Gamma^2)$ на Γ^2_Λ. Маргінальні розподіли міри μ^Λ — це ймовірнісні міри $(\mu^\Lambda)^\pm$ на $\big(\Gamma^\pm_\Lambda, \mathcal{B}(\Gamma^\pm_\Lambda)\big)$, визначені аналогічно до (5.4).

З іншого боку, ми можемо розглянути проекції $(\mu^\pm)^\Lambda$ мір $\mu^\pm$ на простір $\big(\Gamma^\pm_\Lambda, \mathcal{B}(\Gamma^\pm_\Lambda)\big)$, відповідно до означення 2.13.

Твердження 5.9. *Для довільного* $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$

$$(\mu^\pm)^\Lambda = (\mu^\Lambda)^\pm. \qquad (5.5)$$

Доведення. Для обраного $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$ розглянемо довільну функцію $F : \Gamma^2 \to \mathbb{R}$, яка циліндрична по першій змінній, тобто для якої існує $\mathcal{B}_\Lambda(\Gamma^+)$-вимірна функція $F^+ : \Gamma^+ \to \mathbb{R}$, така що $F(\gamma^+, \gamma^-) = F^+(\gamma^+) = F^+\left(\gamma^+_\Lambda\right)$. Тоді

$$\int_{\Gamma^2} F\left(\gamma^+, \gamma^-\right) d\mu\left(\gamma^+, \gamma^-\right) = \int_{\Gamma^+_\Lambda \times \Gamma^-_\Lambda} F\left(\gamma^+_\Lambda, \gamma^-_\Lambda\right) d\mu^\Lambda\left(\gamma^+_\Lambda, \gamma^-_\Lambda\right)$$
$$= \int_{\Gamma^+_\Lambda} F^+\left(\gamma^+_\Lambda\right) \int_{\Gamma^-_\Lambda} d\mu^\Lambda\left(\gamma^+_\Lambda, \gamma^-_\Lambda\right) = \int_{\Gamma^+_\Lambda} F^+\left(\gamma^+_\Lambda\right) d\left(\mu^\Lambda\right)^+\left(\gamma^+_\Lambda\right).$$

З іншого боку,

$$\int_{\Gamma^2} F\left(\gamma^+, \gamma^-\right) d\mu\left(\gamma^+, \gamma^-\right) = \int_{\Gamma^+ \times \Gamma^-} F^+\left(\gamma^+\right) d\mu\left(\gamma^+, \gamma^-\right)$$
$$= \int_{\Gamma^+} F^+\left(\gamma^+\right) d\mu^+\left(\gamma^+\right) = \int_{\Gamma^+_\Lambda} F^+\left(\gamma^+_\Lambda\right) d\left(\mu^+\right)^\Lambda\left(\gamma^+_\Lambda\right).$$

Твердження доведено. □

Розглянемо також безпосереднє узагальнення твердження 1.17.

Твердження 5.10. *Рівність*

$$\int_{\Gamma_0^2} \sum_{\substack{\xi^+ \subset \eta^+ \\ \xi^- \subset \eta^-}} H(\eta^+, \eta^-, \xi^+, \xi^-)\, d\lambda^2(\eta^+, \eta^-)$$
$$= \int_{\Gamma_0^2} \int_{\Gamma_0^2} H(\eta^+ \cup \xi^+, \eta^- \cup \xi^-, \xi^+, \xi^-)\, d\lambda^2(\xi^+, \xi^-) d\lambda^2(\eta^+, \eta^-)$$

має місце для всіх вимірних функцій $H : \Gamma_0^2 \times \Gamma_0^2 \to \mathbb{R}$*, таких що принаймні одна з частин цієї рівності є скінченною для* $|H|$.

Доведення. Нехай H є невід'ємною функцією. За означенням міри λ^2, маємо

$$\int_{\Gamma_0^2} \sum_{\substack{\xi^+ \subset \eta^+ \\ \xi^- \subset \eta^-}} H(\eta^+, \eta^-, \xi^+, \xi^-)\, d\lambda^2(\eta^+, \eta^-) = \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{n!} \frac{1}{m!}$$
$$\times \int_{(\mathbb{R}^d)^n} \int_{(\mathbb{R}^d)^m} \sum_{\xi^+ \subset \{x_1, \ldots, x_n\}} \sum_{\xi^- \subset \{y_1, \ldots, y_m\}} H(\{x_1, \ldots, x_n\}, \{y_1, \ldots, y_m\}, \xi^+, \xi^-)$$
$$\times\, dx_1 \ldots dx_n dy_1 \ldots dy_m$$
$$= \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{n!} \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} \sum_{j=0}^m \frac{m!}{j!(m-j)!}$$
$$\times \int_{(\mathbb{R}^d)^n} \int_{(\mathbb{R}^d)^m} H(\{x_1, \ldots, x_n\}, \{y_1, \ldots, y_m\}, \{x_1, \ldots, x_i\}, \{y_1, \ldots, y_j\})$$
$$\times\, dx_1 \ldots dx_n dy_1 \ldots dy_m$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=i}^{\infty}\sum_{m=j}^{\infty} \frac{1}{i!(n-i)!}\frac{1}{j!(m-j)!}$$
$$\times \int_{(\mathbb{R}^d)^n}\int_{(\mathbb{R}^d)^m} H(\{x_1,\dots,x_n\},\{y_1,\dots,y_m\},\{x_1,\dots,x_i\},\{y_1,\dots,y_j\})$$
$$\times\, dx_1\dots dx_n dy_1\dots dy_m$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{i!n!}\frac{1}{j!m!}$$
$$\times \int_{(\mathbb{R}^d)^{n+i}}\int_{(\mathbb{R}^d)^{m+j}} H(\{x_1,\dots,x_{n+i}\},\{y_1,\dots,y_{m+j}\},\{x_1,\dots,x_i\},\{y_1,\dots,y_j\})$$
$$\times\, dx_1\dots dx_{n+i} dy_1\dots dy_{m+j}$$
$$= \int_{\Gamma_0^2}\int_{\Gamma_0^2} H(\eta^+\cup\xi^+,\eta^-\cup\xi^-,\xi^+,\xi^-)\, d\lambda^2(\xi^+,\xi^-)d\lambda^2(\eta^+,\eta^-).$$

Для загальної H, такої що принаймні один з інтегралів з умови є скінченним для $|H|$ результат випливає зі стандартної побудови інтегралу Лебега. □

Визначимо ще деякі поняття, аналогічні до розглянутих вище на просторах конфігурацій одного типу.

Означення 5.11. 1. Функція $G : \Gamma_0^2 \to \mathbb{R}$ має локальний носій, якщо існує $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$, таке що $G \restriction_{\Gamma_0^2\setminus(\Gamma_\Lambda^+\times\Gamma_\Lambda^-)} = 0$. Клас усіх вимірних функцій на Γ_0^2 із локальним носієм позначимо $L_{\mathrm{ls}}^0(\Gamma_0^2)$.

2. Множина $B \in \mathcal{B}(\Gamma_0^2)$ називається обмеженою, якщо існують $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$ та $N \in \mathbb{N}$, такі що
$$B \subset \Big(\bigsqcup_{n=0}^{N}\Gamma_\Lambda^{+,(n)}\Big)\times\Big(\bigsqcup_{n=0}^{N}\Gamma_\Lambda^{-,(n)}\Big).$$
Клас усіх обмежених множин в $\mathcal{B}(\Gamma_0^2)$ позначимо $\mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\Gamma_0^2)$.

3. Функція $G : \Gamma_0^2 \to \mathbb{R}$ має обмежений носій, якщо існує $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\Gamma_0^2)$, така що $G \restriction_{\Gamma_0^2\setminus\widetilde{B}} = 0$. Клас усіх обмежених функцій з обмежених носієм позначимо $B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0^2)$.

4. Міра ρ on $\big(\Gamma_0^2,\mathcal{B}(\Gamma_0^2)\big)$ називається локально скінченною, якщо $\rho(B) < \infty$ для всіх $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\Gamma_0^2)$. Клас усіх таких мір ми позначимо $\mathcal{M}_{\mathrm{lf}}(\Gamma_0^2)$.

5. Міра $\mu \in \mathcal{M}^1(\Gamma^2)$ має скінченні локальні моменти всіх порядків, якщо для всіх $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$ та $n \in \mathbb{N}_0$
$$\int_{\Gamma^2} |\gamma_\Lambda^+|^n|\gamma_\Lambda^-|^n\, d\mu(\gamma^+,\gamma^-) < \infty.$$
Клас усіх ймовірнісних мір на Γ^2 із локальними скінченними моментами усіх порядків будемо позначати $\mathcal{M}_{\mathrm{fm}}^1(\Gamma^2)$.

6. Клас вимірних функцій на Γ^2 циліндричних по обом змінним будемо позначати $\mathcal{F}_{\mathrm{cyl}}(\Gamma^2)$.

Означення 5.12. Розглянемо перетворення $\mathrm{K} : L^0_{\mathrm{ls}}(\Gamma^2_0) \to \mathcal{F}_{\mathrm{cyl}}(\Gamma^2)$, що задане формулою

$$(\mathrm{K}G)(\gamma^+,\gamma^-) := \sum_{\substack{\eta^+ \Subset \gamma^+ \\ \eta^- \Subset \gamma^-}} G(\eta^+,\eta^-), \qquad (\gamma^+,\gamma^-) \in \Gamma, \tag{5.6}$$

де $G \in L^0_{\mathrm{ls}}(\Gamma^2_0)$.

Зауваження 5.13. Розглянемо одиничні оператори (тотожні відображення) $I^\pm$ на функціях на $\Gamma^\pm$ (а отже, і на $\Gamma^\pm_0$). Визначимо наступні оператори на функціях на Γ^2_0:

$$K^+ := K \otimes I^-, \quad K^- := I^+ \otimes K.$$

Тоді ми можемо переписати (5.6):

$$\mathrm{K} = K^+K^- = K^-K^+. \tag{5.7}$$

З (5.7) випливає, що відображення $\mathrm{K} : L^0_{\mathrm{ls}}(\Gamma^2_0) \to \mathcal{F}_{\mathrm{cyl}}(\Gamma^2)$ є лінійним, зберігає додатні функції та має обернене

$$\begin{aligned}(\mathrm{K}^{-1}F)(\eta^+,\eta^-) &= (K^+)^{-1}(K^-)^{-1} = (K^-)^{-1}(K^+)^{-1} \\ &= \sum_{\substack{\xi^+ \subset \eta^+ \\ \xi^- \subset \eta^-}} (-1)^{|\eta^+ \setminus \xi^+| + |\eta^- \setminus \xi^-|} F(\xi^+,\xi^-), \quad (\eta^+,\eta^-) \in \Gamma^2_0.\end{aligned}$$

Означення 5.14. Нехай $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma^2)$. Кореляційною мірою, що відповідає мірі μ, називається міра $\rho_\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{lf}}(\Gamma^2_0)$, визначена рівністю

$$\rho_\mu(A) := \int_{\Gamma^2} (\mathrm{K}1\!\!1_A)(\gamma^+,\gamma^-)\, d\mu(\gamma^+,\gamma^-), \qquad A \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\Gamma^2_0), \tag{5.8}$$

де $1\!\!1_A : \Gamma^2_0 \to \mathbb{R}$ — функція-індикатор множини $A \in \mathcal{B}(\Gamma^2_0)$.

Зауважимо, що $\rho_\mu(\{\emptyset\},\{\emptyset\}) = 1$.

Твердження 5.15. *Нехай $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma^2)$. Тоді для всіх $G \in B_{\mathrm{bs}}(\Gamma^2_0)$ виконується $G \in L^1(\Gamma^2_0,\rho_\mu)$, причому*

$$\int_{\Gamma^2_0} G(\eta^+,\eta^-)\, d\rho_\mu(\eta^+,\eta^-) = \int_{\Gamma^2} (\mathrm{K}G)(\gamma^+,\gamma^-)\, d\mu(\gamma^+,\gamma^-).$$

Доведення цілком аналогічне доведенню твердження 3.9 з [76, Corollary 4.1].

Твердження 5.16. *Нехай міра $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma^2)$ є локально абсолютно неперервною відносно міри $\pi_z \otimes \pi_z$, $z > 0$. Клас таких мір позначимо $\mathcal{M}^1_{\mathrm{fm},\pi}(\Gamma^2)$. Тоді кореляційна міра ρ_μ є абсолютно неперервною відносно міри $\lambda^2 := \lambda \otimes \lambda$ на $\big(\Gamma^2_0, \mathcal{B}(\Gamma^2_0)\big)$.* Кореляційним функціоналом *міри μ називатимемо відповідну похідну Радона—Нікодима:*

$$k_\mu(\eta^+,\eta^-) := \frac{d\rho_\mu}{d\lambda^2}(\eta^+,\eta^-), \qquad (\eta^+,\eta^-) \in \Gamma^2_0.$$

Тоді $k_\mu(\emptyset,\emptyset)=1$. *Більше того, для довільного* $\Lambda\in\mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$

$$k_\mu(\eta^+,\eta^-)=\int_{\Gamma_\Lambda^+}\int_{\Gamma_\Lambda^-}\frac{d\mu^\Lambda}{d\lambda^2}(\eta^+\cup\xi^+,\eta^-\cup\xi^-)d\lambda(\xi^+)d\lambda(\xi^-). \tag{5.9}$$

для λ^2*-м.в.* $(\eta^+,\eta^-)\in\Gamma_\Lambda^2$.

Доведення. Нехай множина $B\in\mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\Gamma_0^2)$ є такою, що $\lambda^2(B)=0$. Тоді знайдеться $\Lambda\in\mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$, таке що $B\in\Gamma_\Lambda^+\times\Gamma_\Lambda^-$. Тоді, з твердження 5.15 дістанемо:

$$0=\lambda^2(B)=\int_{\Gamma_0^2}1\!\!1_B d\lambda^2=\int_{\Gamma^+}\int_{\Gamma^+}(\mathrm{K}1\!\!1_B)(\gamma^+,\gamma^-)d\pi^\Lambda(\gamma^+)d\pi^\Lambda(\gamma^-). \tag{5.10}$$

Оскільки $\mathrm{K}1_B\geq 0$, то з (5.10) маємо, що $\mathrm{K}1_B=0$ $\pi^\Lambda\otimes\pi^\Lambda$-м.н. А отже, внаслідок абсолютної неперервності $\pi^\Lambda\otimes\pi^\Lambda$ та $\mu^\Lambda\otimes\mu^\Lambda$, маємо, що $\mathrm{K}1_B=0$ $\mu^\Lambda\otimes\mu^\Lambda$-м.н. Звідси, враховуючи (5.8), одразу дістанемо, що $\rho_\mu(B)=0$. Рівність (5.9) прямо випливає з твердження 5.10. □

Твердження 5.17. *Нехай міра* $\mu\in\mathcal{M}^1_{\mathrm{fm},\pi}(\Gamma^2)$. *Тоді маргінальні міри* $\mu^\pm$ *належать класу* $\mathcal{M}^1_{\mathrm{fm},\pi}(\Gamma)$. *Більше того, якщо* k_μ, $k_\mu^\pm$ *— кореляційні функціонали мір* μ, $\mu^\pm$, *відповідно, то для* λ*-м.в.* $\eta^\pm\in\Gamma^\pm$

$$k_\mu(\eta^+,\emptyset)=k_\mu^+(\eta^+),\qquad k_\mu(\emptyset,\eta^-)=k_\mu^-(\eta^-).$$

Доведення. Для довільного $\Lambda\in\mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$ і довільної вимірної функції $F:\Gamma_\Lambda^+\to\mathbb{R}_+$ з (5.5) маємо для всіх $z>0$

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_\Lambda^+}F(\gamma^+)\,d(\mu^+)^\Lambda(\gamma^+)&=\int_{\Gamma_\Lambda^+}F(\gamma^+)\,d(\mu^\Lambda)^+(\gamma^+)=\int_{\Gamma_\Lambda^+}F(\gamma^+)\int_{\Gamma_\Lambda^-}d\mu^\Lambda(\gamma^+,\gamma^-)\\&=\int_{\Gamma_\Lambda^+}F(\gamma^+)\int_{\Gamma_\Lambda^-}\frac{d\mu^\Lambda}{d(\pi_z^\Lambda\otimes\pi_z^\Lambda)}(\gamma^+,\gamma^-)\,d(\pi_z^\Lambda\otimes\pi_z^\Lambda)(\gamma^+,\gamma^-)\\&=\int_{\Gamma_\Lambda^+}F(\gamma^+)\Big(\int_{\Gamma_\Lambda^-}\frac{d\mu^\Lambda}{d(\pi_z^\Lambda\otimes\pi_z^\Lambda)}(\gamma^+,\gamma^-)\,d\pi_z^\Lambda(\gamma^-)\Big)d\pi_z^\Lambda(\gamma^+).\end{aligned}$$

Отже, міра μ^+ локально абсолютна неперервна відносно міри Пуассона π_z, $z>0$, причому для π_z^Λ-м.в. $\gamma^+\in\Gamma_\Lambda^+$

$$\frac{d(\mu^+)^\Lambda}{d\pi_z^\Lambda}(\gamma^+)=\int_{\Gamma_\Lambda^-}\frac{d\mu^\Lambda}{d(\pi_z^\Lambda\otimes\pi_z^\Lambda)}(\gamma^+,\gamma^-)\,d\pi_z^\Lambda(\gamma^-). \tag{5.11}$$

Очевидна рівність для всіх $\Lambda\in\mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$, $n\in\mathbb{N}$

$$\int_{\Gamma^+}\left|\gamma^+\cap\Lambda\right|^n d\mu^+(\gamma^+)=\int_{\Gamma^2}\left|\gamma^+\cap\Lambda\right|^n\left|\gamma^-\cap\Lambda\right|^0 d\mu(\gamma^+,\gamma^-)<\infty$$

доводить, що $\mu^+\in\mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$. Тоді з (3.9) випливає, що

$$k_\mu^+(\eta^+)=\int_{\Gamma_\Lambda^+}\frac{d(\mu^+)^\Lambda}{d\lambda_z^\Lambda}(\eta^+\cup\xi^+)d\lambda_z(\xi^+) \tag{5.12}$$

для λ_z-м.в. $\eta^+\in\Gamma_\Lambda^+$, $\Lambda\in\mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$.

Поклавши в (5.9) $\eta^- = \emptyset$ дістанемо з (5.11) та (5.12), що

$$k_\mu(\eta^+, \emptyset) = \int_{\Gamma_\Lambda^+} \Big(\int_{\Gamma_\Lambda^-} \frac{d\mu^\Lambda}{d\lambda_z^2} (\eta^+ \cup \xi^+, \xi^-) d\lambda_z(\xi^-) \Big) d\lambda_z(\xi^+)$$
$$= \int_{\Gamma_\Lambda^+} \frac{d(\mu^\Lambda)^+}{d\lambda_z} (\eta^+ \cup \xi^+) d\lambda_z(\xi^+) = k_\mu^+(\eta^+).$$

Для k_μ^- доведення аналогічне. □

Означення 5.18. Функція $k : \Gamma_0^2 \to \mathbb{R}$ називається позитивно означеною в сенсі Ленарда, якщо для довільної $G \in B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0^2)$, такої що

$$(\mathrm{K}G)(\gamma^+, \gamma^-) \geq 0$$

для всіх $(\gamma^+, \gamma^-) \in \Gamma^2$, виконана нерівність

$$\int_{\Gamma_0^2} G(\eta^+, \eta^-) k(\eta^+, \eta^-) \, d\lambda(\eta^+) d\lambda(\eta^-) \geq 0.$$

Зауваження 5.19. З твердження 5.15 випливає, що якщо k_μ — кореляційний функціонал деякої міри $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{fm}}^1(\Gamma^2)$, то k_μ є позитивно означеним в сенсі Ленарда.

Означення 5.20. Введемо наступну згортку між вимірними функціями G_1 та G_2 на Γ_0^2:

$$(G_1 \circledast G_2)(\eta^+, \eta^-) := \sum_{\substack{\xi_1^+ \sqcup \xi_2^+ \sqcup \xi_3^+ = \eta^+ \\ \xi_1^- \sqcup \xi_2^- \sqcup \xi_3^- = \eta^-}} G_1(\xi_1^+ \cup \xi_2^+, \xi_1^- \cup \xi_2^-) \, G_2(\xi_2^+ \cup \xi_3^+, \xi_2^- \cup \xi_3^-). \tag{5.13}$$

З твердження 3.29 та рівностей (5.7), (5.13) одразу випливає, що для довільних $G_1, G_2 \in L_{\mathrm{ls}}^0(\Gamma_0^2)$.

$$\big(\mathrm{K}(G_1 \star G_2)\big)(\gamma^+, \gamma^-) = (\mathrm{K}G_1)(\gamma^+, \gamma^-) \cdot (\mathrm{K}G_2)(\gamma^+, \gamma^-), \tag{5.14}$$

де $(\gamma^+, \gamma^-) \in \Gamma^2$.

Крім позитивної означеності в сенсі Ленарда з означення 5.18 для функцій на Γ_0^2 можна розглянути аналог позитивної означеності в сенсі $\star$-згортки (див. зауваження 3.33).

Означення 5.21. Вимірна функція $k : \Gamma_0^2 \to \mathbb{R}$ називається позитивно означеною в сенсі $\circledast$-згортки, якщо для довільної $G \in B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0^2)$

$$\int_{\Gamma_0^2} (G \circledast G)(\eta^+, \eta^-) k(\eta^+, \eta^-) d\lambda(\eta^+) d\lambda(\eta^-) \geq 0.$$

Зауваження 5.22. Аналогічно до зауваження 3.33, дістанемо, що оскільки, внаслідок (5.14), $\mathrm{K}(G \circledast G) = |\mathrm{K}G|^2 \geq 0$, то з позитивної означеності в сенсі Ленарда випливає позитивна означеність в сенсі $\circledast$-згортки.

6 Деякі властивості згорток на просторах конфігурацій

Результати цього розділу здебільшого стосуються згорток на просторі конфігурацій одного типу, але дослідження базується на попередньому розділі.

Позначення 6.1. Протягом цього розділу ми будемо використовувати наступні позначення.

- ▷ Нехай $F : \Gamma \to \mathbb{R}$ — вимірна функція. Розглянемо вимірну функцію $\widetilde{F} : \Gamma^2 \to \mathbb{R}$, визначену рівністю
$$\widetilde{F}(\gamma^+,\gamma^-) = F(\gamma^+ \cup \gamma^-), \qquad (\gamma^+,\gamma^-) \in \Gamma^2.$$
- ▷ Аналогічно, для вимірної функції $G : \Gamma_0 \to \mathbb{R}$ розглянемо вимірну функцію $\widetilde{G} : \Gamma_0^2 \to \mathbb{R}$, визначену рівністю
$$\widetilde{G}(\eta^+,\eta^-) = G(\eta^+ \cup \eta^-), \qquad (\eta^+,\eta^-) \in \Gamma_0^2. \tag{6.1}$$
- ▷ Нехай $\mu_i \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$, $i = 1,2$. Розглянемо міру $\widehat{\mu}$ на $\big(\Gamma^2, \mathcal{B}(\Gamma^2)\big)$, визначену рівністю
$$d\widehat{\mu}(\gamma^+,\gamma^-) = d\mu_1(\gamma^+)\, d\mu_2(\gamma^-).$$
Тобто $\widehat{\mu} = \mu_1 \otimes \mu_2$. Очевидно, що $\widehat{\mu} \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma^2)$.
- ▷ Аналогічно, для $\rho_i \in \mathcal{M}_{\mathrm{lf}}(\Gamma_0)$, $i = 1,2$ розглянемо міру $\widehat{\rho}$ на $\big(\Gamma_0^2, \mathcal{B}(\Gamma_0^2)\big)$, визначену рівністю
$$d\widehat{\rho}(\eta^+,\eta^-) = d\rho_1(\eta^+)\, d\rho_2(\eta^-).$$
Тобто $\widehat{\rho} = \rho_1 \otimes \rho_2$. Очевидно, що $\widehat{\rho} \in \mathcal{M}_{\mathrm{lf}}(\Gamma_0^2)$.

Означення 6.2. Нехай $\mu_i \in \mathcal{M}^1(\Gamma)$, $i = 1,2$. Міра $\mu \in \mathcal{M}^1(\Gamma)$ називається згорткою мір μ_1 та μ_2, якщо для довільної вимірної функції $F : \Gamma \to \mathbb{R}$, такої що $\widetilde{F} \in L^1(\Gamma^2, d\widehat{\mu})$, виконується наступна рівність
$$\begin{aligned}\int_\Gamma F(\gamma) d\mu(\gamma) &= \int_{\Gamma^2} \widetilde{F}(\gamma^+,\gamma^-) d\widehat{\mu}(\gamma^+,\gamma^-) \\ &= \int_{\Gamma^+}\int_{\Gamma^-} F(\gamma^+ \cup \gamma^-)\, d\mu_1(\gamma^+)\, d\mu_2(\gamma^-).\end{aligned}$$
Позначення: $\mu = \mu_1 * \mu_2$.

Твердження 6.3. *Нехай $\mu_i \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$, $i = 1,2$ та $\mu = \mu_1 * \mu_2$. Тоді $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$. Якщо $\mu_i \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm},\pi}(\Gamma)$, $i = 1,2$, то $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm},\pi}(\Gamma)$.*

Доведення. Для довільного $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$, $n \in \mathbb{N}$ маємо
$$\begin{aligned}\int_\Gamma |\gamma_\Lambda|^n\, d\mu(\gamma) &= \int_{\Gamma^+}\int_{\Gamma^-} \big(|\gamma_\Lambda^+| + |\gamma_\Lambda^-|\big)^n\, d\mu_1(\gamma^+)\, d\mu_2(\gamma^-) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int_\Gamma |\gamma_\Lambda|^k\, d\mu_1(\gamma) \int_\Gamma |\gamma_\Lambda|^{n-k}\, d\mu_2(\gamma) < \infty,\end{aligned}$$

що доводить перше твердження. Далі, для довільної $\mathcal{B}_\Lambda(\Gamma)$-вимірної функції F маємо

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_\Lambda} F(\gamma)\, d\mu^\Lambda(\gamma) &= \int_\Gamma F(\gamma)\, d\mu(\gamma) = \int_{\Gamma^+}\int_{\Gamma^-} F(\gamma^+\cup\gamma^-)\, d\mu_1(\gamma^+)\, d\mu_2(\gamma^-)\\
&= \int_{\Gamma^+_\Lambda}\int_{\Gamma^-_\Lambda} F(\gamma^+\cup\gamma^-)\, d\mu_1^\Lambda(\gamma^+)\, d\mu_2^\Lambda(\gamma^-)\\
&= \int_{\Gamma^+_\Lambda}\int_{\Gamma^-_\Lambda} F(\gamma^+\cup\gamma^-) \frac{d\mu_1^\Lambda}{d\lambda}(\gamma^+)\frac{d\mu_2^\Lambda}{d\lambda}(\gamma^-)\, d\lambda(\gamma^+)\, d\lambda(\gamma^-)\\
&\overset{(3.22)}{=} \int_{\Gamma_\Lambda} F(\gamma)\Big(\frac{d\mu_1^\Lambda}{d\lambda} * \frac{d\mu_2^\Lambda}{d\lambda}\Big)(\gamma)\, d\lambda(\gamma),
\end{aligned}$$

що доводить друге твердження. □

В аналогічний спосіб можна ввести згортку мір на просторі скінченних конфігурацій.

Означення 6.4. Нехай ρ_i, $i = 1, 2$ — міри на просторі $\big(\Gamma_0, \mathcal{B}(\Gamma_0)\big)$. Згорткою цих мір називається міра ρ на $\big(\Gamma_0, \mathcal{B}(\Gamma_0)\big)$, така що для довільної вимірної $G : \Gamma_0 \to \mathbb{R}$, для якої $\widetilde{G} \in L^1(\Gamma_0^2, d\widehat{\rho})$, виконується рівність

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_0} G(\eta) d\rho(\eta) &= \int_{\Gamma_0^2} \widetilde{G}(\eta^+, \eta^-)\, d\widehat{\rho}(\eta^+, \eta^-)\\
&= \int_{\Gamma_0^+}\int_{\Gamma_0^-} G(\eta^+\cup\eta^-)\, d\rho_1(\eta^+)\, d\rho_2(\eta^-). \qquad (6.2)
\end{aligned}$$

Позначення: $\rho = \rho_1 * \rho_2$.

Твердження 6.5. *Нехай $\rho_{1,2} \in \mathcal{M}_{\mathrm{lf}}(\Gamma_0)$, $\rho = \rho_1 * \rho_2$. Тоді $\rho \in \mathcal{M}_{\mathrm{lf}}(\Gamma_0)$.*

Доведення. Нехай $B \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\Gamma_0)$, тобто існують $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$ та $N \in \mathbb{N}$, такі що $B \subset A_N := \bigcup_{n=0}^{N} \Gamma_\Lambda^{(n)}$. Тоді

$$\begin{aligned}
\rho(B) &= \int_\Gamma 1\!\!1_B(\eta)\, d\rho(\eta) = \int_{\Gamma_0^+}\int_{\Gamma_0^-} 1\!\!1_B(\eta^+\cup\eta^-)\, d\rho_1(\eta^+)\, d\rho_2(\eta^-)\\
&\le \int_{\Gamma_0^+}\int_{\Gamma_0^-} 1\!\!1_{A_N}(\eta^+\cup\eta^-)\, d\rho_1(\eta^+)\, d\rho_2(\eta^-)\\
&\le \int_{\Gamma_0^+}\int_{\Gamma_0^-} 1\!\!1_{A_N}(\eta^+)1\!\!1_{A_N}(\eta^-)\, d\rho_1(\eta^+)\, d\rho_2(\eta^-) = \rho_1(A_N)\rho_2(A_N) < \infty.
\end{aligned}$$

Твердження доведено. □

Наступне твердження встановлює зв'язок між згортками на просторах мір над Γ та Γ_0.

Твердження 6.6. *Нехай $\mu_i \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm},\pi}(\Gamma)$, ρ_i — відповідні кореляційні міри, $i = 1, 2$. Тоді $\rho = \rho_1 * \rho_2$ є кореляційною мірою для міри $\mu = \mu_1 * \mu_2$.*

Доведення. Нехай $G \in B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0)$, тоді, звісно, $\widetilde{G} \in B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0^2) \subset L^1\big(\Gamma_0^2, d\widehat{\rho}\big)$. Нехай $F = KG$. Тоді для довільних $(\gamma^+, \gamma^-) \in \widetilde{\Gamma}^2$ (тобто $\gamma^+ \cap \gamma^- = \emptyset$) дістанемо

$$\begin{aligned}
&\widetilde{F}(\gamma^+, \gamma^-) = F(\gamma^+ \cup \gamma^-) = \sum_{\eta \Subset \gamma^+ \cup \gamma^-} G(\eta) \\
&= \sum_{\eta^+ \Subset \gamma^+} \sum_{\eta^- \Subset \gamma^-} G(\eta^+ \cup \eta^-) = \sum_{\eta^+ \Subset \gamma^+} \sum_{\eta^- \Subset \gamma^-} \widetilde{G}(\eta^+, \eta^-) = \big(\mathrm{K}\widetilde{G}\big)(\gamma^+, \gamma^-).
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Доведемо, що $\widehat{\rho} = \rho_1 \otimes \rho_2 \in \mathcal{M}_{\mathrm{lf}}(\Gamma_0^2)$ — кореляційна міра для міри $\widehat{\mu} = \mu_1 \otimes \mu_2 \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma^2)$. Для цього перевіримо справедливість (5.8) з $\mu = \widehat{\mu}$, $\rho_\mu = \widehat{\rho}$. Для довільного $A = A^+ \times A^- \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\Gamma_0^2)$, де $A^\pm \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\Gamma_0)$ маємо

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma^2} (\mathrm{K}1\!\!1_A)(\gamma^+, \gamma^-)\, d\widehat{\mu}(\gamma^+, \gamma^-) \\
&= \int_{\Gamma^2} \sum_{\eta^+ \Subset \gamma^+} \sum_{\eta^- \Subset \gamma^-} 1\!\!1_A(\eta^+, \eta^-)\, d\mu_1(\gamma^+)\, d\mu_2(\gamma^-) \\
&= \int_{\Gamma^+} \sum_{\eta^+ \Subset \gamma^+} 1\!\!1_{A^+}(\eta^+)\, d\mu_1(\gamma^+) \int_{\Gamma^-} \sum_{\eta^- \Subset \gamma^-} 1\!\!1_{A^-}(\eta^-)\, d\mu_2(\gamma^-) \\
&= \rho_1(A^+)\rho_2(A^-) = \widehat{\rho}(A).
\end{aligned}$$

Отже, за (5.8), міра $\widehat{\rho}$ дійсно співпадає з кореляційною мірою для $\widehat{\mu}$ на всіх множинах вигляду $A = A^+ \times A^- \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\Gamma_0^2)$ з $A^\pm \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\Gamma_0)$. Із зауваження 5.2 і пункту 2 з означення 5.11 маємо, що ці міри співпадають на всьому класі множин $\mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\Gamma_0^2)$. Оскільки $\mu_i \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm},\pi}(\Gamma)$, $i = 1, 2$, то з означення 2.18 одразу випливає, що міра $\widehat{\mu}$ є локально абсолютно неперервна відносно міри $\pi_z \otimes \pi_z$, $z > 0$. Отже, за твердженням 5.4, $\widehat{\mu}(\widetilde{\Gamma}^2) = 1$. Таким чином,

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_0} G(\eta) d\rho(\eta) &= \int_{\Gamma_0^+} \int_{\Gamma_0^-} \widetilde{G}(\eta^+, \eta^-)\, d\widehat{\rho}(\eta^+, \eta^-) = \int_{\Gamma^+} \int_{\Gamma^-} \big(\mathrm{K}\widetilde{G}\big)(\gamma^+, \gamma^-)\, d\widehat{\mu}(\gamma^+, \gamma^-) \\
&= \iint_{\widetilde{\Gamma}^2} \big(\mathrm{K}\widetilde{G}\big)(\gamma^+, \gamma^-)\, d\widehat{\mu}(\gamma^+, \gamma^-) = \iint_{\widetilde{\Gamma}^2} \widetilde{F}(\gamma^+, \gamma^-)\, d\widehat{\mu}(\gamma^+, \gamma^-) \\
&= \int_{\Gamma^+} \int_{\Gamma^-} \widetilde{F}(\gamma^+, \gamma^-)\, d\mu_1(\gamma^+)\, d\mu_2(\gamma^-) = \int_{\Gamma} F(\gamma)\, d\mu(\gamma),
\end{aligned}$$

що доводить твердження. □

Позначення “$*$” для згортки мір співпадає із позначенням для згортки Руеля функцій, заданій в (3.19). Це вмотивоване наступним твердженням.

Твердження 6.7. *Нехай $\rho_i \in \mathcal{M}_{\mathrm{lf}}(\Gamma_0)$, $i = 1, 2$ і припустимо, що існують похідні Радона—Нікодима відносно міри Лебега—Пуассона: $k_i = \dfrac{d\rho_i}{d\lambda}$, $i = 1, 2$. Тоді згортка мір $\rho = \rho_1 * \rho_2$ також має похідну Радона—Нікодима відносно міри Лебега—Пуассона $k = \dfrac{d\rho}{d\lambda}$ і при цьому $k = k_1 * k_2$.*

Доведення. Нехай $G \in B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0)$. Тоді, враховуючи умову, з (6.2) дістанемо

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_0} G(\eta)\, d\rho(\eta) &= \int_{\Gamma_0^+}\int_{\Gamma_0^-} G(\eta^+ \cup \eta^-)\, d\rho_1(\eta^+)\, d\rho_2(\eta^-)\\ &= \int_{\Gamma_0^+}\int_{\Gamma_0^-} G(\eta^+ \cup \eta^-) k_1(\eta^+) k_2(\eta^-)\, d\lambda(\eta^+)\, d\lambda(\eta^-)\\ &\overset{(3.22)}{=} \int_{\Gamma_0} G(\eta)(k_1 * k_2)(\eta)\, d\lambda(\eta).\end{aligned}$$

Твердження доведене. □

Твердження 6.8. *Нехай функції $k_i : \Gamma_0 \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ є вимірними. Тоді функція $k(\eta) = (k_1 * k_2)(\eta)$ є позитивно означеною в сенсі Ленарда (відповідно, в сенсі $\star$-згортки) на Γ_0, якщо тільки функція $\widehat{k}(\eta^+, \eta^-) := k_1(\eta^+) k_2(\eta^-)$ є позитивно означеною в сенсі Ленарда (відповідно, в сенсі $\circledast$-згортки) на Γ_0^2.*

Доведення. Нехай $G_i \in B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0)$ і функції $\widetilde{G}_i \in B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0^2)$, $i = 1, 2$, визначені аналогічно до (6.1). Тоді для $(\eta^+, \eta^-) \in \Gamma_0^2$, таких що $\eta^+ \cap \eta^- = \emptyset$, дістанемо

$$\begin{aligned}(G_1 \star G_2)(\eta^+ \cup \eta^-) &= \sum_{\xi_1 \sqcup \xi_2 \sqcup \xi_3 = \eta^+ \cup \eta^-} G_1(\xi_1 \cup \xi_2) G_2(\xi_2 \cup \xi_3)\\ &= \sum_{\eta_1^+ \sqcup \eta_2^+ \sqcup \eta_3^+ = \eta^+} \sum_{\eta_1^- \sqcup \eta_2^- \sqcup \eta_3^- = \eta^-} G_1(\eta_1^+ \cup \eta_2^+ \cup \eta_1^- \cup \eta_2^-) G_2(\eta_2^+ \cup \eta_3^+ \cup \eta_2^- \cup \eta_3^-)\\ &= (\widetilde{G}_1 \circledast \widetilde{G}_2)(\eta^+, \eta^-). \end{aligned} \tag{6.4}$$

Отже, для довільної $G \in B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0)$ та $\widetilde{G} \in B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0^2)$ визначеної в (6.1) маємо

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_0} (G \star G)(\eta) k(\eta) d\lambda(\eta) &= \int_{\Gamma_0} (G \star G)(\eta)(k_1 * k_2)(\eta) d\lambda(\eta)\\ &\overset{(3.22)}{=} \int_{\Gamma_0^2} (G \star G)(\eta^+ \cup \eta^-) k_1(\eta^+) k_2(\eta^-) d\lambda(\eta^+) d\lambda(\eta^-)\\ &\underset{(5.1)}{\overset{(6.4)}{=}} \int_{\Gamma_0^2} (\widetilde{G} \circledast \widetilde{G})(\eta^+, \eta^-) k_1(\eta^+) k_2(\eta^-) d\lambda(\eta^+) d\lambda(\eta^-). \end{aligned} \tag{6.5}$$

З рівності (6.5) одразу випливає, що з позитивної означеності функції $\widehat{k} = k_1 \otimes k_2$ в сенсі $\circledast$-згортки випливає позитивна означеність функції $k = k_1 * k_2$ в сенсі $\star$-згортки.

Далі, з рівності (6.3) випливає, що якщо $G \in B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0)$ і $KG \geq 0$, то $\mathrm{K}\widetilde{G} \geq 0$. А оскільки

$$\int_{\Gamma_0} G(\eta)(k_1 * k_2)(\eta) d\lambda(\eta) \overset{(3.22)}{=} \int_{\Gamma_0^2} \widetilde{G}(\eta^+, \eta^-) \widehat{k}(\eta^+, \eta^-) d\lambda(\eta^+) d\lambda(\eta^-),$$

то з позитивної означеності функції $\widehat{k}$ в сенсі Ленарда на Γ_0^2 випливає позитивна означеність функції k в сенсі Ленарда на Γ_0. □

7 Марківські еволюції в просторах конфігурацій

Об'єктом дослідження у цитованих в кінці цього розділу статтях будуть марківські еволюції локально скінченних систем точок у просторі $\mathbb{R}^d$, тобто конфігурацій з простору $\Gamma = \Gamma_{\mathbb{R}^d}$. Там розглянуто, зокрема, динаміки народження-загибелі, в яких точки можуть з'являтися і зникати випадковим чином у процесі еволюції, а також динаміки стрибків, у яких точки з конфігурації залишаються у наявності, проте змінюють своє положення у просторі, перестрибуючи з місця на місце випадковим чином. Кожна така еволюція описується за допомогою певного (формального) марківського оператора L, який діє на деякому просторі функцій, визначених на Γ (наприклад, просторі обмежених функцій неперервних у грубій топології). Термін «марківський» також можна розуміти дещо формально — оператор має володіти двома властивостями: 1) $L1 = 0$, якщо тільки $L1$ взагалі визначено (умова стохастичності); 2) якщо визначено LF для $F : \Gamma \to \mathbb{R}$ і існує $\gamma_0 \in \Gamma$, таке що $F(\gamma) \le F(\gamma_0)$ для всіх $\gamma \in \Gamma$, то $(LF)(\gamma_0) \le 0$ (принцип максимуму). В цьому розділі буде сформульовано низку питань, пов'язаних з дослідженням таких еволюцій.

Зазначимо одразу, що побудова марківського процесу $\Gamma \ni \gamma_0 \mapsto \gamma_t \in \Gamma$, $t \ge 0$, асоційованого з відповідним оператором L, не є предметом цитованих в кінці цього розділу досліджень. На сьогодні існує тільки декілька робіт, де такі процеси побудовані для конкретних динамік, див.: [73] (процеси народження-загибелі в обмеженій області), [65] (процеси народження-загибелі з постійним коефіцієнтом загибелі і істотними структурними обмеженнями на коефіцієнт народження), [92] (процес контактів), [87] (динаміки народження-загибелі та стрибків без взаємодії). Якщо такий процес існує, то з ним асоційована сильно неперервна напівгрупа (C_0-напівгрупа у подальшому) у просторі обмежених функцій, неперервних у грубій топології. Вивчення умов існування такої напівгрупи без побудови власне марківського процесу є також важливою задачею, яка на сьогодні далека від повного розв'язання.

Інший спосіб побудови процесу, пов'язаного з наперед заданим марківським оператором L, застосовується до таких операторів, для яких відома міра $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$, така що L з певною областю визначення є симетричний (або навіть самоспряжений) оператор у просторі $L^2(\Gamma, \mu)$. Тоді, розглянувши відповідну форму Дірихле (тобто білінійну форму, що відповідає оператору L) можна за певних умов застосовувати загальну теорію, розвинуту в [64, 104]. Це дає побудову марківського процесу, який має наперед заданий інваріантний розподіл μ, тобто $\Gamma' \ni \gamma_0 \mapsto \gamma_t \in \Gamma'$, $t \ge 0$, де $\mu(\Gamma') = 1$, проте про множину Γ' відомим є тільки факт її існування, а не опис. Така динаміка називається рівноважною. З нею пов'язане також питання дослідження напівгрупи із генератором L у просторі $L^p(\Gamma, \mu)$, $p \ge 2$. Рівноважні марківські динаміки на Γ розглядалися в [84–86] та інш.

Переважна більшість результатів цитованих нижче досліджень стосується так званої нерівноважної динаміки. Вона може задаватися різними нееквівалентними, взагалі кажучи, способами, які ми зараз розглянемо.

Позначення 7.1. Введемо наступні позначення.

▷ Нехай $\mu \in \mathcal{M}^1(\Gamma)$, $F \in L^1(\Gamma, \mu)$. Позначимо

$$\langle F, \mu \rangle := \int_\Gamma F(\gamma)\, d\mu(\gamma). \tag{7.1}$$

▷ Нехай G та k — вимірні функції на Γ_0, такі що $G \cdot k \in L^1(\Gamma_0, \lambda)$. Позначимо

$$\langle\!\langle G, k \rangle\!\rangle := \int_{\Gamma_0} G(\eta) k(\eta)\, d\lambda(\eta). \tag{7.2}$$

Тепер опишемо деякі способи завдання нерівноважних динамік.

1. Першим з таких способів є вивчення (зворотного) рівняння Колмогорова

$$\frac{\partial}{\partial t} F_t = L F_t, \quad t \geq 0 \tag{7.3}$$

у деякому просторі функцій F. Це може бути згаданий вище банахів простір обмежених неперервних функцій на Γ або, наприклад, простір $L^p(\Gamma, \mu)$, де $\mu \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$ вже не має бути симетризуючою мірою для оператора L. У цьому випадку існування розв'язку відповідної коректно поставленої задачі Коші призводить до побудови C_0-напівгрупи в цьому банаховому просторі з генератором L. Також рівняння (7.3) можна розглядати у деякій шкалі функціональних просторів $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$, $T \geq t \geq s \geq 0$, тобто $F_t \in \mathcal{F}_t$, $0 \leq t \leq T \leq \infty$.

2. Між функціями і мірами на Γ існує природне спарювання, задане в (7.1), якщо, звісно, права частина має сенс. Це дозволяє розглянути еволюцію мір $\mathcal{M}^1(\Gamma) \ni \mu_0 \mapsto \mu_t \in \mathcal{M}^1(\Gamma)$, породжену марківським оператором L, як розв'язок рівняння

$$\frac{d}{dt} \langle F, \mu_t \rangle = \langle LF, \mu_t \rangle, \quad t \geq 0 \tag{7.4}$$

для всіх F з деякого класу функцій на Γ, наприклад,

$$F \in K\bigl(B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0)\bigr) \subset \mathcal{F}_{\mathrm{pb}}(\Gamma) \subset \mathcal{F}_{\mathrm{cyl}}(\Gamma). \tag{7.5}$$

Рівняння (7.4) називається (прямим) рівнянням Колмогорова або (узагальненим) рівнянням Фокера—Планка.

3. Якщо припустити, що розв'язок рівняння (7.4) існує при (7.5), і при цьому, скажімо, $\mu_t \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm},\pi}(\Gamma)$, $t \geq 0$, то можна розглянути кореляційні функції $k_t := k_{\mu_t}$ мір μ_t і, враховуючи (3.6), отримати рівняння

$$\frac{d}{dt} \langle\!\langle K^{-1} F, k_t \rangle\!\rangle = \langle\!\langle K^{-1} LF, k_t \rangle\!\rangle, \quad t \geq 0, \tag{7.6}$$

для всіх $F \in K\bigl(B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0)\bigr)$. Тут спарювання між вимірними функціями на Γ_0 задається формулою (7.2), якщо тільки права частина має сенс. В рівнянні (7.6) вираз $K^{-1}LF$ розуміється в сенсі зауваження 3.5, що можливо, якщо, наприклад, $\bigl|LF(\gamma)\bigr| < \infty$ для всіх $\gamma \in \Gamma_0 \subset \Gamma$. Поклавши в (7.6) $F = KG$, $G \in B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0)$ і ввівши позначення

$$(\widehat{L}G)(\eta) := (K^{-1}LKG)(\eta), \quad \eta \in \Gamma_0$$

для $G \in B_{\mathrm{bs}}(\Gamma_0)$, дістанемо рівняння

$$\frac{d}{dt}\langle\!\langle G, k_t \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \widehat{L}G, k_t \rangle\!\rangle, \quad t \geq 0. \tag{7.7}$$

Якщо тепер оператор $\widehat{L}^*$ визначено як дуальний до $\widehat{L}$ в сенсі спарювання (7.2), то можна замість (7.7) розглянути рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t} k_t = \widehat{L}^* k_t, \quad t \geq 0. \tag{7.8}$$

Слабкий (точніше, $*$-слабкий) розв'язок рівняння (7.8) є, за означенням, розв'язком рівняння (7.7). Крім того, виникає питання про вивчення сильних розв'язків рівняння (7.8) у певних просторах функцій. Як вказувалось у позначенні 1.13, ми можемо розглянути нескінченний вектор з функцій $\bigl(k_t^{(n)}\bigr)_{n\in\mathbb{N}_0}$, тоді рівняння (7.8) можна розглядати у просторі таких векторів, а оператор $\widehat{L}^*$ буде мати реалізацію у вигляді нескінченної матриці.[1]

4. Важливим для застосувань є відшукання розв'язків рівняння (7.8) у просторах функцій типу $\mathcal{K}_{C,\delta}$ (див. позначення 3.15, а також зауваження 3.16). Але ці простори є несепарабельними, що значно ускладнює вивчення еволюційних рівнянь у них, див. зокрема, згадані у вступі [11, 103]. Тому, як допоміжний засіб, розглядається «передуальне» рівняння
$$\frac{\partial}{\partial t} G_t = \widehat{L} G_t, \quad t \geq 0 \tag{7.9}$$
у підходящому просторі функцій. Це рівняння є ще одним способом завдання нерівноважної динаміки.
5. Враховуючи зв'язок (4.1) між кореляційними функціями та функціоналами Боголюбова, можна розглянути еволюційне рівняння
$$\frac{\partial}{\partial t} B_t = \widetilde{L} B_t, \quad t \geq 0 \tag{7.10}$$
для
$$B_t(\theta) := \int_{\Gamma_0} e_\lambda(\theta) k_t \, d\lambda \tag{7.11}$$
у підходящому просторі цілих функціоналів на $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$.

Зауваження 7.2.
1. Звісно, розглянуті вище способи завдання нерівноважних динамік не є еквівалентними.
2. У задачах математичної фізики традиційно висхідним вважається рівняння (7.8). Ще раз варто підкреслити про важливість дослідження розв'язків такого рівняння у просторах $\mathcal{K}_{C,\delta}$, тобто просторах типу «L^∞ з вагою», а не в просторах типу «L^1 з вагою». Річ у тім, що інтегровані кореляційні функції відповідають еволюції на Γ, зосередженій на Γ_0 або навіть на Γ_Λ, $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$.

[1] Система рівнянь для $k_t^{(n)}$ утворює аналог ієрархії Боголюбова—Стрельцової (інша назва: ББГКІ-ієрархія) для гамільтонової динаміки (див., напр., [24]).

3. Якщо існує розв'язок k_t, $t \geq 0$ рівняння (7.8), то, взагалі кажучи, він може не бути кореляційною функцією міри $\mu_t \in \mathcal{M}^1_{\mathrm{fm}}(\Gamma)$. Для цього потрібно перевірити, наприклад, умови твердження 3.23 або наслідку 3.25 або зауваження 3.33.

Таким чином, одним зі способів дослідження рівняння (7.4) є наступний. Розглядається рівняння (7.9) у просторах типу «L^1 з вагою». Побудована еволюція за допомогою спарювання (7.2) дає розв'язок рівняння (7.7) (або, навіть, класичний розв'язок рівняння (7.8)). Нарешті, досліджується питання про позитивну означенність цього розв'язку, що дає розв'язок рівняння (7.4).

Також існують методи безпосереднього дослідження класичного розв'язку рівняння (7.8) на скінченному проміжку часу (так званий метод Овсяннікова), див. [58] та посилання нижче.

Оскільки, як вже відзначалося, система рівнянь на функції $k_t^{(n)}$ має ієрархічну структуру, то, як правило, навіть маючи інформацію про існування, єдинність та регулярні властивості розв'язку рівняння (7.8), ми не можемо отримати ніякі локальні характеристики цього розв'язку (наприклад, як веде себе перша кореляційна функція — щільність системи — в різних областях евклідового простору). Тому існують методи знаходження наближених значень кореляційних функцій за допомогою введення малого параметру у систему, так званого скейлінгу, або шкалювання. Детальніше див., напр., [43] та посилання нижче.

Досліження стохастичних еволюції складних систем за допомогою методів, описаних у даній статті, протягом останніх десяти років були розвинуті у низці робіт, що стосуються різних типів марківських генераторів та різних задач з вивчення рівноважних та, здебільшого, нерівноважних динамік. Див., зокрема, [17–19, 35–61, 72, 77, 79–93, 109].

Література

[1] Ю. М. Березанский, Ю. Г. Кондратьев. *Спектральные методы в бесконечномерном анализе.* Киев: Наукова думка, 1988.

[2] Н. Н. Боголюбов. *Проблемы динамической теории в статистической физике.* Москва—Ленинград: ОГИЗ, Гостехиздат, 1946.

[3] А. М. Вершик, И. М. Гельфанд, М. И. Граев. Представления группы диффеоморфизмов. *УМН*, 30(6(186)):3–50, 1975.

[4] Дж. В. Гиббс. *Основные принципы статистической механики.* Регулярная и хаотическая динамика, 2002.

[5] Р. Л. Добрушин, Я. Г. Синай, Ю. М. Сухов. *Динамические системы-2. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления*, chapter Динамические системы статистической механики, pages 235–284. Москва: ВИНИТИ, 1985.

[6] К. Черчиньяни. *Теория и приложения уравнения Больцмана.* Москва: Мир, 1978.

[7] *Неравновесные явления. Уравнение Больцмана* // Под ред. Д. Л. Либовица и Е. У. Монтролла. Москва: Мир, 1986.

[8] S. Albeverio, Y. Kondratiev, and M. Röckner. Analysis and geometry on configuration spaces. *J. Funct. Anal.*, 154(2):444–500, 1998.

[9] S. Albeverio, Y. Kondratiev, and M. Röckner. Analysis and geometry on configuration spaces: the Gibbsian case. *J. Funct. Anal.*, 157(1):242–291, 1998.

[10] D. Aldous. Interacting particle systems as stochastic social dynamics. *Bernoulli*, 19(4):1122–1149, 2013.

[11] W. Arendt, A. Grabosch, G. Greiner, U. Groh, H. P. Lotz, U. Moustakas, R. Nagel, F. Neubrander, and U. Schlotterbeck. *One-parameter semigroups of positive operators*, volume 1184 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986. x+460 pp.

[12] V. P. Belavkin and V. N. Kolokol′tsov. On a general kinetic equation for many-particle systems with interaction, fragmentation and coagulation. *R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 459(2031):727–748, 2003.

[13] V. P. Belavkin, V. P. Maslov, and S. È. Tariverdiev. The asymptotic dynamics of a system with a large number of particles described by Kolmogorov-Feller equations. *Teoret. Mat. Fiz.*, 49(3):298–306, 1981.

[14] Y. M. Berezanskiĭ. The generalized moment problem associated with correlation measures. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 37(4):86–91, 2003.

[15] Y. Berezansky, Y. Kondratiev, T. Kuna, and E. Lytvynov. On a spectral representation for correlation measures in configuration space analysis. *Methods Funct. Anal. Topology*, 5(4):87–100, 1999.

[16] Y. M. Berezansky and D. A. Mierzejewski. The investigation of a generalized moment problem associated with correlation measures. *Methods Funct. Anal. Topology*, 13(2):124–151, 2007.

[17] C. Berns, Y. Kondratiev, Y. Kozitsky, and O. Kutoviy. Kawasaki dynamics in continuum: micro- and mesoscopic descriptions. *J. of Dyn and Diff. Eqn.*, 25(4):1027–1056, 2013.

[18] C. Berns, Y. Kondratiev, and O. Kutoviy. Construction of a state evolution for kawasaki dynamics in continuum. *Analysis and Mathematical Physics*, 3(2):97–117, 2013.

[19] C. Boldrighini, Y. Kondratiev, R. Minlos, A. Pellegrinotti, and E. Zhizhina. Random jumps in evolving random environment. *Markov Process. Related Fields*, 14(4):543–570, 2008.

[20] B. Bolker and S. W. Pacala. Using moment equations to understand stochastically driven spatial pattern formation in ecological systems. *Theor. Popul. Biol.*, 52(3):179–197, 1997.

[21] D. G. Bossomaier, Terry R. J. and Green, editor. *Complex systems.* Cambridge University Press, Cambridge, 2000. vi+413 pp.

[22] N. R. Campbell. The study of discontinuous problem. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 15:117–136, 1909.

[23] N. R. Campbell. Discontinuities in light emission. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 15:310–328, 1910.

[24] C. Cercignani, V. I. Gerasimenko, and D. Y. Petrina. *Many-particle dynamics and kinetic equations*, volume 420 of *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997. viii+244 pp.

[25] N. Champagnat, R. Ferrière, and S. Méléard. From individual stochastic processes to macroscopic models in adaptive evolution. *Stoch. Models*, 24 (suppl. 1):2–44, 2008.

[26] A. C.-L. Chian. *Complex systems approach to economic dynamics*, volume 592 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems.* Springer, Berlin, 2007. x+101 pp.

[27] A. De Masi, I. Merola, E. Presutti, and Y. Vignaud. Potts models in the continuum. Uniqueness and exponential decay in the restricted ensembles. *J. Stat. Phys.*, 133(2):281–345, 2008.

[28] A. De Masi, I. Merola, E. Presutti, and Y. Vignaud. Coexistence of ordered and disordered phases in Potts models in the continuum. *J. Stat. Phys.*, 134(2):243–306, 2009.

[29] A. De Masi and E. Presutti. *Mathematical methods for hydrodynamic limits*, volume 1501 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 1991. x+196 pp.

[30] X. Descombes, R. Minlos, and E. Zhizhina. Object extraction using a stochastic birth-and-death dynamics in continuum. *J. Math. Imaging Vision*, 33(3):347–359, 2009.

[31] U. Dieckmann and R. Law. Relaxation projections and the method of moments. In *The Geometry of Ecological Interactions*, pages 412–455. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2000.

[32] R. Durrett, T. M. Liggett, F. Spitzer, and A.-S. Sznitman. *Interacting particle systems at Saint-Flour.* Probability at Saint-Flour. Springer, Heidelberg, 2012. viii+331 pp.

[33] R. Durrett and J. Mayberry. Evolution in predator-prey systems. *Stochastic Process. Appl.*, 120(7):1364–1392, 2010.

[34] D. Filonenko, D. Finkelshtein, and Y. Kondratiev. On two-component contact model in continuum with one independent component. *Methods Funct. Anal. Topology*, 14(3):209–228, 2008.

[35] D. Finkelshtein. Functional evolutions for homogeneous stationary death-immigration spatial dynamics. *Methods Funct. Anal. Topology*, 17(4): 300–318, 2011.

[36] D. Finkelshtein. On convolutions on configuration spaces. I. Spaces of finite configurations. *Ukrainian Math. J.*, 64(11):1752–1775, 2013.

[37] D. Finkelshtein. On convolutions on configuration spaces. II. Spaces of locally finite configurations. *Ukrainian Math. J.*, 64(12):1919–1944, 2013.

[38] D. Finkelshtein and Y. Kondratiev. Regulation mechanisms in spatial stochastic development models. *J. Stat. Phys.*, 136(1):103–115, 2009.

[39] D. Finkelshtein, Y. Kondratiev, and Y. Kozitsky. Glauber dynamics in continuum: a constructive approach to evolution of states. *Discrete and Cont. Dynam. Syst. - Ser A.*, 33(4):1431–1450, 4 2013.

[40] D. Finkelshtein, Y. Kondratiev, Y. Kozitsky, and O. Kutoviy. Stochastic evolution of a continuum particle system with dispersal and competition: Micro- and mesoscopic description. *The European Physical Journal Special Topics*, 216(1):107–116, 2013.

[41] D. Finkelshtein, Y. Kondratiev, Y. Kozitsky, and O. Kutoviy. The statistical dynamics of a spatial logistic model and the related kinetic equation. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 25(2):343–370, 2015.

[42] D. Finkelshtein, Y. Kondratiev, and O. Kutoviy. Individual based model with competition in spatial ecology. *SIAM J. Math. Anal.*, 41(1):297–317, 2009.

[43] D. Finkelshtein, Y. Kondratiev, and O. Kutoviy. Vlasov scaling for stochastic dynamics of continuous systems. *J. Stat. Phys.*, 141(1):158–178, 2010.

[44] D. Finkelshtein, Y. Kondratiev, and O. Kutoviy. Vlasov scaling for the Glauber dynamics in continuum. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, 14(4):537–569, 2011.

[45] D. Finkelshtein, Y. Kondratiev, and O. Kutoviy. Correlation functions evolution for the Glauber dynamics in continuum. *Semigroup Forum*, 85: 289–306, 2012.

[46] D. Finkelshtein, Y. Kondratiev, and O. Kutoviy. Semigroup approach to birth-and-death stochastic dynamics in continuum. *J. of Funct. Anal.*, 262(3):1274–1308, 2012.

[47] D. Finkelshtein, Y. Kondratiev, and O. Kutoviy. Establishment and fecundity in spatial ecological models: statistical approach and kinetic equations. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, 16(2): 1350014 (24 pages), 2013.

[48] D. Finkelshtein, Y. Kondratiev, and O. Kutoviy. An operator approach to Vlasov scaling for some models of spatial ecology. *Methods Funct. Anal. Topology*, 19(2):108–126, 2013.

[49] D. Finkelshtein, Y. Kondratiev, and O. Kutoviy. Statistical dynamics of continuous systems: perturbative and approximative approaches. *Arab. J. Math.*, 2014.

[50] D. Finkelshtein, Y. Kondratiev, O. Kutoviy, and E. Lytvynov. Binary jumps in continuum. I. Equilibrium processes and their scaling limits. *J. Math. Phys.*, 52:063304:1–25, 2011.

[51] D. Finkelshtein, Y. Kondratiev, O. Kutoviy, and E. Lytvynov. Binary jumps in continuum. II. Non-equilibrium process and a Vlasov-type scaling limit. *J. Math. Phys.*, 52:113301:1–27, 2011.

[52] D. Finkelshtein, Y. Kondratiev, O. Kutoviy, S. Molchanov, and E. Zhizhina. Density behavior of spatial birth-and-death stochastic evolution of mutating genotypes under selection rates. *Russ. J. Math. Phys.*, 21 (4):450–459, 2014.

[53] D. Finkelshtein, Y. Kondratiev, O. Kutoviy, and M. J. Oliveira. Dynamical Widom–Rowlinson model and its mesoscopic limit. *J. Stat. Phys.*, 158(1):57–86, 2015.

[54] D. Finkelshtein, Y. Kondratiev, O. Kutoviy, and E. Zhizhina. An approximative approach for construction of the Glauber dynamics in continuum. *Math. Nachr.*, 285(2–3):223–235, 2012.

[55] D. Finkelshtein, Y. Kondratiev, O. Kutoviy, and E. Zhizhina. On an aggregation in birth-and-death stochastic dynamics. *Nonlinearity*, 27: 1105–1133, 2014.

[56] D. Finkelshtein, Y. Kondratiev, and E. Lytvynov. Equilibrium Glauber dynamics of continuous particle systems as a scaling limit of Kawasaki dynamics. *Random Oper. Stoch. Equ.*, 15(2):105–126, 2007.

[57] D. Finkelshtein, Y. Kondratiev, and M. J. Oliveira. Markov evolutions and hierarchical equations in the continuum. I. One-component systems. *J. Evol. Equ.*, 9(2):197–233, 2009.

[58] D. Finkelshtein, Y. Kondratiev, and M. J. Oliveira. Glauber dynamics in the continuum via generating functionals evolution. *Complex Analysis and Operator Theory*, 6(4):923–945, 2012.

[59] D. Finkelshtein, Y. Kondratiev, and M. J. Oliveira. Kawasaki dynamics in the continuum via generating functionals evolution. *Methods Funct. Anal. Topology*, 18(1):55–67, 2012.

[60] D. Finkelshtein, Y. Kondratiev, and M. J. Oliveira. Markov evolutions and hierarchical equations in the continuum. II: Multicomponent systems. *Reports Math. Phys.*, 71(1):123–148, 2013.

[61] D. Finkelshtein and M. J. Oliveira. A survey on bogoliubov generating functionals for interacting particle systems in the continuum. In C. Bernardin and P. Gonçalves, editors, *From Particle Systems to Partial Differential Equations*, volume 75 of *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, pages 161–177. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014.

[62] G. B. Folland. *Real analysis.* Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons Inc., New York, second edition, 1999. xvi+386 pp.

[63] N. Fournier and S. Meleard. A microscopic probabilistic description of a locally regulated population and macroscopic approximations. *The Annals of Applied Probability*, 14(4):1880–1919, 2004.

[64] M. Fukushima, Y. Ōshima, and M. Takeda. *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, volume 19 of *de Gruyter Studies in Mathematics.* Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994. x+392 pp.

[65] N. L. Garcia and T. G. Kurtz. Spatial birth and death processes as solutions of stochastic equations. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 1:281–303 (electronic), 2006.

[66] N. L. Garcia and T. G. Kurtz. Spatial point processes and the projection method. *Progress in Probability*, 60:271–298, 2008.

[67] H.-O. Georgii and O. Häggström. Phase transition in continuum Potts models. *Comm. Math. Phys.*, 181(2):507–528, 1996.

[68] H.-O. Georgii, S. Miracle-Sole, J. Ruiz, and V. A. Zagrebnov. Mean-field theory of the Potts gas. *J. Phys. A*, 39(29):9045–9053, 2006.

[69] J. W. Gibbs. *Elementary principles in statistical mechanics: developed with especial reference to the rational foundation of thermodynamics.* Dover publications Inc., New York, 1960. xviii+207 pp.

[70] E. Glötzl. Time reversible and Gibbsian point processes. I. Markovian spatial birth and death processes on a general phase space. *Math. Nachr.*, 102:217–222, 1981.

[71] E. Glötzl. Time reversible and Gibbsian point processes. II. Markovian particle jump processes on a general phase space. *Math. Nachr.*, 106: 63–71, 1982.

[72] M. Grothaus, Y. Kondratiev, E. Lytvynov, and M. Röckner. Scaling limit of stochastic dynamics in classical continuous systems. *Ann. Probab.*, 31 (3):1494–1532, 2003.

[73] R. A. Holley and D. W. Stroock. Nearest neighbor birth and death processes on the real line. *Acta Math.*, 140(1-2):103–154, 1978.

[74] C. Kipnis and C. Landim. *Scaling limits of interacting particle systems*, volume 320 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 1999. xvi+442 pp.

[75] V. N. Kolokoltsov. Kinetic equations for the pure jump models of k-nary interacting particle systems. *Markov Process. Related Fields*, 12(1): 95–138, 2006.

[76] Y. Kondratiev and T. Kuna. Harmonic analysis on configuration space. I. General theory. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, 5 (2):201–233, 2002.

[77] Y. Kondratiev and T. Kuna. Correlation functionals for Gibbs measures and Ruelle bounds. *Methods Funct. Anal. Topology*, 9(1):9–58, 2003.

[78] Y. Kondratiev, T. Kuna, and M. J. Oliveira. On the relations between Poissonian white noise analysis and harmonic analysis on configuration spaces. *J. Funct. Anal.*, 213(1):1–30, 2004.

[79] Y. Kondratiev, T. Kuna, and M. J. Oliveira. Holomorphic Bogoliubov functionals for interacting particle systems in continuum. *J. Funct. Anal.*, 238(2):375–404, 2006.

[80] Y. Kondratiev, O. Kutoviy, and E. Lytvynov. Diffusion approximation for equilibrium Kawasaki dynamics in continuum. *Stochastic Process. Appl.*, 118(7):1278–1299, 2008.

[81] Y. Kondratiev, O. Kutoviy, and R. Minlos. On non-equilibrium stochastic dynamics for interacting particle systems in continuum. *J. Funct. Anal.*, 255(1):200–227, 2008.

[82] Y. Kondratiev, O. Kutoviy, and S. Pirogov. Correlation functions and invariant measures in continuous contact model. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, 11(2):231–258, 2008.

[83] Y. Kondratiev, O. Kutoviy, and E. Zhizhina. Nonequilibrium Glauber-type dynamics in continuum. *J. Math. Phys.*, 47(11):113501, 17, 2006.

[84] Y. Kondratiev and E. Lytvynov. Glauber dynamics of continuous particle systems. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 41(4):685–702, 2005.

[85] Y. Kondratiev, E. Lytvynov, and M. Röckner. Infinite interacting diffusion particles. I. Equilibrium process and its scaling limit. *Forum Math.*, 18(1):9–43, 2006.

[86] Y. Kondratiev, E. Lytvynov, and M. Röckner. Equilibrium Kawasaki dynamics of continuous particle systems. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, 10(2):185–209, 2007.

[87] Y. Kondratiev, E. Lytvynov, and M. Röckner. Non-equilibrium stochastic dynamics in continuum: The free case. *Cond. Matter Phys.*, 11(4(56)): 701–721, 2008.

[88] Y. Kondratiev, R. Minlos, and E. Zhizhina. One-particle subspace of the Glauber dynamics generator for continuous particle systems. *Rev. Math. Phys.*, 16(9):1073–1114, 2004.

[89] Y. Kondratiev, R. Minlos, and E. Zhizhina. Self-organizing birth-and-death stochastic systems in continuum. *Rev. Math. Phys.*, 20(4):451–492, 2008.

[90] Y. Kondratiev, E. Pechersky, and S. Pirogov. Markov process of muscle motors. *Nonlinearity*, 21(8):1929–1936, 2008.

[91] Y. Kondratiev, A. Rebenko, and M. Röckner. On diffusion dynamics for continuous systems with singular superstable interaction. *J. Math. Phys.*, 45(5):1826–1848, 2004.

[92] Y. Kondratiev and A. Skorokhod. On contact processes in continuum. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, 9(2):187–198, 2006.

[93] Y. Kondratiev and E. Zhizhina. Spectral analysis of a stochastic Ising model in continuum. *J. Stat. Phys.*, 129(1):121–149, 2007.

[94] T. Kuna. *Studies in configuration space analysis and applications.* Bonner Mathematische Schriften [Bonn Mathematical Publications], 324. Universität Bonn Mathematisches Institut, Bonn, 1999. ii+187 pp. Dissertation, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, Bonn, 1999.

[95] T. Kuna, Y. Kondratiev, and J. L. da Silva. Marked Gibbs measures via cluster expansion. *Methods Funct. Anal. Topology*, 4(4):50–81, 1998.

[96] J. Lebowitz and E. Lieb. Phase transition in a continuum classical system with finite inteiactions. *Physics Letters A*, 39:98–100, 1972.

[97] A. Lenard. Correlation functions and the uniqueness of the state in classical statistical mechanics. *Comm. Math. Phys.*, 30:35–44, 1973.

[98] A. Lenard. States of classical statistical mechanical systems of infinitely many particles. I. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 59(3):219–239, 1975.

[99] A. Lenard. States of classical statistical mechanical systems of infinitely many particles. II. Characterization of correlation measures. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 59(3):241–256, 1975.

[100] S. A. Levin. Complex adaptive systems: exploring the known, the unknown and the unknowable. *Bulletin of the AMS*, 40(1):3–19, 2002.

[101] T. M. Liggett. *Interacting particle systems.* Springer-Verlag, New York, 1985ю xv+488 pp.

[102] T. M. Liggett. *Stochastic interacting systems: contact, voter and exclusion processes*, volume 324 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften.* Springer-Verlag, Berlin, 1999. xii+332 pp.

[103] H. P. Lotz. Uniform convergence of operators on L^∞ and similar spaces. *Math. Z.*, 190(2):207–220, 1985.

[104] Z. M. Ma and M. Röckner. *Introduction to the theory of (nonsymmetric) Dirichlet forms.* Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1992. vi+209 pp.

[105] K. Matthes, J. Kerstan, and J. Mecke. *Infinitely divisible point processes.* John Wiley & Sons, Chichester-New York-Brisbane, 1978. xii+532 pp.

[106] J. Mecke. Eine charakteristische Eigenschaft der doppelt stochastischen Poissonschen Prozesse. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 11:74–81, 1968.

[107] U. Murrell, David J. and Dieckmann and R. Law. On moment closures for population dynamics in continuous space. *Journal of Theoretical Biology*, 229(3):421 – 432, 2004.

[108] G. Nicolis and C. Nicolis. *Foundations of complex systems.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2007. xiv+328 pp. Nonlinear dynamics, statistical physics, information and prediction.

[109] O. Ovaskainen, D. Finkelshtein, O. Kutoviy, S. Cornell, B. Bolker, and Y. Kondratiev. A mathematical framework for the analysis of spatial-temporal point processes. *Theoretical Ecology*, 7(1):101–113, 2014.

[110] G. Papanicolaou, editor. *Hydrodynamic behavior and interacting particle systems*, volume 9 of *The IMA Volumes in Mathematics and its Applications*. Springer-Verlag, New York, 1987. x+210 pp.

[111] K. R. Parthasarathy. *Probability measures on metric spaces*. Probability and Mathematical Statistics, No. 3. Academic Press Inc., New York, 1967. xi+276 pp.

[112] M. D. Penrose. Existence and spatial limit theorems for lattice and continuum particle systems. *Prob. Surveys*, 5:1–36, 2008.

[113] D. Y. Petrina, V. I. Gerasimenko, and P. V. Malyshev. *Mathematical foundations of classical statistical mechanics*, volume 8 of *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*. Taylor & Francis, London, second edition, 2002. x+338 pp.

[114] C. Preston. Spatial birth-and-death processes. *Bull. Inst. Internat. Statist.*, 46(2):371–391, 405–408, 1975.

[115] X. Qi. A functional central limit theorem for spatial birth and death processes. *Adv. in Appl. Probab.*, 40(3):759–797, 2008.

[116] A. Quarteroni, L. Formaggia, and A. Veneziani, editors. *Complex systems in biomedicine*. Springer-Verlag Italia, Milan, 2006. xiv+292 pp.

[117] M. Röckner. Stochastic analysis on configuration spaces: basic ideas and recent results. In *New directions in Dirichlet forms*, volume 8 of *AMS/IP Stud. Adv. Math.*, pages 157–231. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[118] D. Ruelle. Cluster property of the correlation functions of classical gases. *Rev. Modern Phys.*, 36:580–584, 1964.

[119] D. Ruelle. *Statistical mechanics: Rigorous results*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969. xi+219 pp.

[120] D. Ruelle. Superstable interactions in classical statistical mechanics. *Comm. Math. Phys.*, 18:127–159, 1970.

[121] D. Ruelle. Existence of a phase transition in a continuous classical system. *Phys. Rev. Letters*, 27:1040–1041, 1971.

[122] H. Shimomura. Poisson measures on the configuration space and unitary representations of the group of diffeomorphisms. *J. Math. Kyoto Univ.*, 34(3):599–614, 1994.

[123] A. V. Skorohod. On the differentiability of measures which correspond to stochastic processes. I. Processes with independent increments. *Teor. Veroyatnost. i Primenen*, 2:417–443, 1957.

[124] H. Spohn. Kinetic equations from Hamiltonian dynamics: Markovian limits. *Rev. Modern Phys.*, 52(3):569–615, 1980.

[125] Y. Takahashi. Absolute continuity of Poisson random fields. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 26(4):629–647, 1990.

[126] B. Widom and J. Rowlinson. New model for the study of liquid-vapor phase transitions. *J. Chem. Phys.*, 52(4):1670–1684, 1970.