Interdisciplinary Studies of Complex Systems
No. 27 (2025) 72–84

https://doi.org/10.31392/iscs.2025.27.072 UDC 519.21

# On superfractality of the set of essentially non-normal numbers for factorial expansion

*Yuliia Voloshyn*[1,2], *Vadym Miskyi*[1,3], *Roman Nikiforov*[1,4], *Dmytro Pykhtar*[1,5], *Grygoriy Torbin*[1,6,7]

# Про суперфрактальність множини суттєво анормальних чисел для факторіального розкладу

*Юлія Волошин, Вадим Міськиий, Роман Нікіфоров, Дмитро Пихтар, Григорій Торбін*

**Abstract.** The paper is devoted to the study of fractal properties of distributions of random variables with independent symbols of factorial expansion, as well as to the applications of the obtained results to the metric and dimensional number theory. In particular, we prove that for almost all (in the sense of Lebesgue measure) real numbers from the unit interval the frequency $\nu_{i_0}(x)$ of an arbitrary digit $i_0$ is equal to zero:

$$\nu_{i_0}(x) = 0, \quad \forall i_0 \in \{0, 1, 2, ..., k, ...\} =: N_0.$$

On the other hand, we show that the set of essentially non-normal numbers (i.e., those real numbers which have no frequency of any symbol $i_0 \in N_0$) for the factorial expansion is a superfractal set (i.e., it is a set of zero Lebesgue measure and of maximal (1) Hausdorff–Besicovitch dimension).

*Keywords:* Fractals, Hausdorff–Besicovitch dimension, DP-transformations, locally fine covering families, faithful covering families, Cantor series expansions, random variables with independent symbols of Cantor series expansions, singular probability measures, essentially non-normal numbers, factorial expansion, non-normal numbers, normal numbers

*2020 Mathematics Subject Classification:* 11K55, 28A80, 60G30

[1] Dragomanov Ukrainian State University, Kyiv, Ukraine
[2] yu.p.voloshyn@udu.edu.ua, https://orcid.org/0009-0009-3555-4250
[3] v.v.miskyi@udu.edu.ua, https://orcid.org/0009-0005-0913-7200
[4] r.o.nikiforov@udu.edu.ua, https://orcid.org/0000-0001-9553-3157
[5] d.m.pykhtar@udu.edu.ua
[6] g.m.torbin@udu.edu.ua, https://orcid.org/0000-0003-3088-1614
[7] Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine. torbin@imath.kiev.ua

**Анотація.** Стаття присвячена дослідженню фрактальних властивостей розподілів випадкових величин з незалежними символами факторіального розкладу та застосуванню отриманих результатів в метричній та розмірнісній теорії чисел. Ми доводимо, зокрема, що для майже всіх (в сенсі міри Лебега) дійсних чисел з одиничного відрізка частота $\nu_{i_0}(x)$ довільного символа $i_0$ дорівнює нулю:

$$\nu_{i_0}(x) = 0, \quad \forall i_0 \in \{0, 1, 2, ..., k, ...\} =: N_0.$$

З іншого боку, ми доводимо, що множина суттєво анормальних чисел (тобто тих дійсних чисел, які не мають частоти жодного символа $i_0 \in N_0$) для факторіальної системи числення є суперфрактальною множиною (тобто множиною нульової міри Лебега і максимальної (1) розмірності Хаусдорфа–Безиковича).

*Ключові слова:* Фрактали, розмірність Хаусдорфа–Безиковича, DP-перетворення, локально тонкі системи покриттів, довірчі системи покриттів, розклади Кантора, випадкові величини з незалежними символами розкладів Кантора, сингулярні ймовірнісні міри, суттєво анормальні числа, факторіальний розклад, анормальні числа, нормальні числа

## 1 Вступ

Потужність, міра Лебега, категорії Бера, розмірність Хаусфорфа–Безиковича — основні інструменти порівняння нескінченних множин. Фрактальний бум у математиці та природознавстві, вибух інтересу до дослідження сингулярно неперервних ймовірнісних розподілів та їх фрактальних властивостей, розвиток теорії перетворень, що зберігають розмірність Хаусдорфа–Безиковича з одного боку, природним чином зумовили певну революцію в розмірнісній теорії чисел, а з іншого боку — створили інструментарій для нових результатів у цій царині. Тому не дивно, що метричні, топологічні та фрактальні властивості множин нормальних, квазінормальних, частково анормальних та суттєво анормальних дійсних чисел є предметом інтенсивного вивчення фахівцями з метричної, ймовірнісної та розмірнісної теорій чисел протягом останніх 30 років. Піонерською у цьому відношенні була робота [20], де було доведено суперфрактальність множини $L_s$ суттєво анормальних чисел для $s$-адичних розкладів дійсних чисел. Ця робота та роботи [9, 10, 12–15, 17–19, 21] відкрили цілий напрям досліджень властивостей підмножин анормальних чисел для різних символьних розкладів дійсних чисел (див. [1, 3, 4, 16] та огляди в цих статтях). Важливим у цьому відношенні став воркшоп, який був організований у квітні 2006 року в Боннському університеті професором Sergio Albeverio за сприяння SFB 611 «Singular Phenomena and Scaling in Mathematical Models» (DFG) за участі Lars Olsen (St. Andrews, Scotland), Enrico Zoli (Bologna, Italy), Володимира Королюка, Григорія Торбіна та Романа Нікіфорова (Київ, Україна) та колег з Інституту прикладної математики (Bonn University) та Інституту математики Макса Планка (Bonn). Для вказаних вище робіт та для даної статті важливими є результати з дослідження фрактальних властивостей спектрів та мінімальних розмірнісних носіїв сингулярно неперервних ймовірнісних мір (див. [4–6, 11, 22, 23] та огляди в цих роботах), та пов'язані з ними результати досліджень щодо довірчості локально тонких систем покриттів для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича ( [2, 4, 25, 26]) і результати досліджень, які були започатковані М. Працьовитим та Г. Торбіним, щодо перетворень, які зберігають розмірність Хаусдорфа–Безиковича (див. [7, 8, 24] та огляди в цих роботах). Отримані результати природним чином приводили до гіпотези про те, що для довільного символьного розкладу $f$ дійсних чисел множина суттєво анормальних дійсних чисел (тобто тих дійсних чисел, для яких не існує частоти всіх символів з допустимого алфавіту) є множиною розмірності 1. Ця гіпотеза була спростована в роботі [1], де наведено приклад $Q^*$-розкладу, для якого $\dim_H L(Q^*) = 0$. Тому на сьогодні побутує так звана «$0-1$» гіпотеза про те, що $\dim_H L(f) = 0$ або $\dim_H L(f) = 1$ для довільного $f$-зображення дійсних чисел.

Ця стаття присвячена вивченню фрактальних властивостей розподілів випадкових величин з незалежними символами факторіального розкладу, тобто випадкових величин виду

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{(k+1)!},$$

де $\{\xi_k\}$ — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень $0, 1, ..., k$ з імовірностями $p_{0k}, p_{1k}, ..., p_{kk}$ відповідно; та застосуванню цих результатів в розмірнісній теорії чисел.

У розділі 2 ми доводимо явні формули для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича спектрів таких випадкових величин та вивчаємо тонкі фрактальні властивості таких розподілів. У розділі 3 ми вивчаємо нормальні властивості дійсних чисел, записаних у факторіальній системі числення і доводимо, що для для майже всіх (в сенсі міри Лебега) дійсних чисел з одиничного відрізка частота $\nu_{i_0}(x)$ довільного символа $i_0$ дорівнює нулю:

$$\nu_{i_0}(x) = 0, \quad \forall i_0 \in \{0, 1, 2, ..., k, ...\} =: N_0.$$

У розділі 4, ми доводимо, що множина суттєво анормальних чисел (тобто тих дійсних чисел, які не мають частоти жодного символа $i_0 \in N_0$) для факторіальної системи числення є суперфрактальною множиною (тобто множиною нульової міри Лебега і максимальної (1) розмірності Хаусдорфа–Безиковича).

## 2 Фрактальні властивості спектрів випадкових величин з незалежними символами факторіальних розкладів та тонкі фрактальні властивості міри $\mu_\xi$

Спектр сингулярно неперервного ймовірнісного розподілу є доволі грубою характеристикою розподілу, оскільки навіть континуальна сукупність взаємно сингулярних розподілів може мати ідентичний спектр. Ілюстрацією цього є клас випадкових величин:

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{2^k},$$

де $\xi_k$ — незалежні величини, що набувають значень 0 та 1 з імовірностями $p \in (0; \frac{1}{2})$ та $1 - p$ відповідно. З огляду на це, розмірність Хаусдорфа–Безиковича спектра також вважається грубою фрактальною характеристикою сингулярної міри. Натомість набагато точніше властивості такого розподілу описує розмірність Хаусдорфа самої ймовірнісної міри.

**Означення 1.** Розмірністю Хаусдорфа ймовірнісної міри $\mu_\xi$ називається число

$$\dim_H \mu_\xi = \inf\{\dim_H E\},$$

де інфімум береться за всеможливими борелівськими множинами $E$, для яких $\mu_\xi(E) = 1$.

Питання фрактальних властивостей $\mu_\xi$ все ще не вивчено у повному обсязі. Невідомі загальні формули ні для розмірності Хаусдорфа–Безиковича спектра $S_\xi$, ні для розмірності Хаусдорфа міри $\dim_H \mu_\xi$ для випадкових величин з незалежними символами розкладів Кантора.

Тонкі фрактальні властивості міри та фрактальні властивості спектра таких мір досліджувались в роботі [2]. Зокрема, відомі такі факти

**Теорема 3.** *Нехай*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\ln(n_k)}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-1})} \right)^2 < +\infty. \tag{1}$$

*Тоді*

$$\dim_H \mu_\xi = \varliminf_{k\to\infty} \frac{h_1 + h_2 + \ldots + h_k}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k)},$$

*де $h_k$ — ентропія випадкової величини $\xi_k$, тобто $h_k = -\sum\limits_{i=0}^{n_{k-1}} p_{ik} \ln p_{ik}$.*

Покажемо справедливість теореми для випадкової величини з незалежними символами факторіального розкладу.

**Теорема 4.** *Якщо $\xi$ — випадкова величина з незалежними символами факторіального розкладу, то розмірність Хаусдорфа міри $\mu_\xi$ дорівнює:*

$$\dim_H \mu_\xi = \varliminf_{k\to\infty} \frac{h_1 + h_2 + \ldots + h_k}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k)}.$$

*Доведення.* Для факторіального розкладу $n_k = k + 1$. Розглянемо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\ln(n_k)}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-1})} \right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\ln(k+1)}{\ln(2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k)} \right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\ln(k+1)}{\ln(k!)} \right)^2$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\ln(k+1)}{\ln(\sqrt{2\pi k}) + k \ln\left(\frac{k}{e}\right) + \theta_k} \right)^2,$$

де $|\theta_k| < \dfrac{1}{12k}$.

Очевидно, що $\ln(k+1) \sim \ln k$ і $\ln(\sqrt{2\pi k}) + k\ln(\frac{k}{e}) + \theta_k \sim k\ln k$.

Тоді для загального члена $a_k$ маємо:

$$a_k \sim \left(\frac{\ln k}{k\ln k}\right)^2 = \frac{1}{k^2},$$

звідки і випливає збіжність ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\ln(n_k)}{\ln(n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_{k-1})}\right)^2$, що й потрібно було довести. $\square$

Теорема 1 дає нижню (найважчу) оцінку для розмірності Хаусдорфа–Безиковича спектра випадкової величини з незалежними символами розкладів Кантора у загальному випадку при використані умови (1).

**Теорема 5.** *Якщо*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\ln(n_k)}{\ln(n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_{k-1})}\right)^2 < +\infty,$$

*то розмірність Хаусдорфа–Безиковича спектра $S_\xi$ розподілу випадкової величини $\xi$ з незалежними символами Кантора дорівнює*

$$\dim_H S_\xi = \varliminf_{k\to\infty}\frac{\ln(m_1\cdot m_2\cdot\ldots\cdot m_k)}{\ln(n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_k)},$$

*де $m_k$ — кількість ненульових ймовірностей серед $p_{0k}, p_{1k}, \ldots, p_{(n_k-1)k}$.*

*Доведення.* Спектр розподілу випадкової величини $\xi$ має таку структуру

$$S_\xi = \{x : x = \Delta^C_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots},\ \text{де } p_{\alpha_k k} > 0,\ \forall k\in N\}.$$

Розглянемо допоміжну випадкову величину

$$\xi^* = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi^*_k}{n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_k},$$

де незалежні випадкові величини $\xi^*_k$ набувають значень $0, 1, \ldots, n_k-1$ з імовірностями $p^*_{0k}, p^*_{1k}, \ldots, p^*_{(n_k-1)k}$, причому

$$p^*_{ik} = \begin{cases}\frac{1}{m_k}, & \text{якщо } p_{ik} > 0\\ 0, & \text{якщо } p_{ik} = 0\end{cases}.$$

Зрозуміло, що $S_\xi = S_{\xi^*}$.

Використаємо теорему про розмірність міри $\mu_{\xi^*}$ для отримання нижньої оцінки для $\dim_H S_\xi$. Оскільки виконується умова (1), то згідно теореми 1:

$$\dim_H \mu^*_\xi = \varliminf_{k\to\infty}\frac{h^*_1 + h^*_2 + \ldots + h^*_k}{\ln(n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_k)},$$

де $h^*_k = -\sum\limits_{i=0}^{n_k-1} p^*_{ik}\cdot\ln p^*_{ik}\quad (0\cdot\ln 0 := 0)$.

За побудовою розподілів випадкових величин $\xi_k^*$:

$$h_k^* = \ln(m_k).$$

Отже,

$$\dim_H \mu_{\xi^*} = \varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln m_1 + \ln m_2 + ... + \ln m_k}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k)} = \varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln(m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_k)}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k)}.$$

Оскільки $\dim_H S_{\xi^*} \geq \dim_H \mu_{\xi^*}$ і $\dim_H S_\xi = \dim_H S_{\xi^*}$, то

$$\dim_H S_\xi \geq \varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln(m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_k)}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k)}.$$

Для отримання верхньої оцінки $\dim_H S_\xi$ зауважимо, що $S_\xi$ можна покрити за допомогою :

$m_1$ циліндрів I рангу;

$m_1 \cdot m_2$ циліндрів II рангу;

$\vdots$

$m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_k$ циліндрів $k$-го рангу;

$\vdots$

$\alpha$-об'єм покриття множини $S_\xi$ циліндрами рангу $k$ дорівнює $m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_k \cdot \left(\frac{1}{n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k}\right)^\alpha$.

При фіксованому $\varepsilon > 0$ існує $k_0 = k_0(\varepsilon) \in N$ таке, що покриття $S_\xi$ циліндрами рангу $k > k_0$ є $\varepsilon$-покриттями для $S_\xi$. Отже, при $k > k_0(\varepsilon)$:

$$H_\varepsilon^\alpha(S_\xi) \leq m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_k \cdot \left(\frac{1}{n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k}\right)^\alpha.$$

Позначимо $L := \varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln(m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_k)}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k)}$.

Тоді існує підпослідовність $\{k_s\}$ така, що

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln(m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_{k_s})}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_{k_s})}.$$

Покажемо, що для довільного додатного $\beta$ виконується рівність

$$H^{L+\beta}(S_\xi) = 0.$$

Для довільних $\beta > 0$ і $\varepsilon > 0$ виберемо $s_0$ таке, щоб $\frac{1}{n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_{k_{s_0}}} < \varepsilon$ і розглянемо зчисленну кількість $\varepsilon$-покриттів множини $S_\xi$ циліндрами рангу $k_{s_0+1}, k_{s_0+2}, ..., k_{s_0+l}, ....$

$(L+\beta)$-об'єм цих $\varepsilon$-покриттів дорівнює

$$m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_{k_{s_0+l}} \cdot \left(\frac{1}{n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k_{s_0+l}}}\right)^{L+\beta} =$$

$$= \left(n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k_{s_0+l}}\right)^{\frac{\ln\left(m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_{k_{s_0+l}}\right)}{\ln\left(n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k_{s_0+l}}\right)}} \cdot \left(\frac{1}{n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k_{s_0+l}}}\right)^{L+\beta} =$$

$$= \left(n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k_{s_0+l}}\right)^{\left(\frac{\ln\left(m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_{k_{s_0+l}}\right)}{\ln\left(n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k_{s_0+l}}\right)} - L - \beta\right)} \to 0 \ (l \to \infty),$$

оскільки

$$\frac{\ln\left(m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_{k_{s_0+l}}\right)}{\ln\left(n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k_{s_0+l}}\right)} \to L \ (l \to \infty).$$

Отже, $H_\varepsilon^{L+\beta}(S_\xi) = 0, \ \forall \varepsilon > 0, \ \forall \beta > 0$. Тому

$$H^{L+\beta}(S_\xi) = \lim_{\varepsilon \to 0} H_\varepsilon^{L+\beta}(S_\xi) = 0, \ \forall \beta > 0.$$

Отже, $\dim_H S_\xi \leq L$, що й треба було довести. □

Як показано в доведенні теореми 2, для факторіального розкладу виконується умова (1). Тому з теореми 3 випливає наступне твердження.

**Теорема 6.** *Якщо $\xi$ — випадкова величина з незалежними символами факторіального розкладу, то розмірність Хаусдорфа–Безиковича спектра цієї випадкової величини дорівнює:*

$$\dim_H S_\xi = \varliminf_{k \to \infty} \frac{\ln(m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k)}{\ln(k+1)!},$$

*де $m_k$ — кількість ненульових ймовірностей серед $p_{0k}, p_{1k}, \ldots, p_{(n_k-1)k}$.*

## 3 Про нормальні властивості чисел, породжених факторіальним розкладом

Розглянемо факторіальну систему числення:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k} = \Delta^C \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots, \quad \alpha_j \in \{0, 1, \ldots, n_j - 1\},$$

де $n_k = k + 1$.

Нехай $N_0(x,k)$ – кількість символів «0» серед перших $k$ символів розкладу $x$. Аналогічно означимо $N_1(x,k), N_2(x,k), \ldots$.

Якщо існує границя $\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{N_{i_0}(x,k)}{k}$, то її називають «частотою появи символа “$i_0$” в розкладі Кантора числа $x$» і позначають $\nu_{i_0}(x)$.

**Теорема 7.** *У факторіальній системі числення для $\lambda$-майже всіх дійсних чисел $x \in [0;1]$ має місце рівність*

$$\nu_i(x) = 0, \quad \forall i \in N_0$$

*Доведення.* Нехай $\omega = [0;1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, $P$ — міра Лебега $\lambda$, $x$ — випадкова величина, яка має рівномірний розподіл на $[0;1]$.

Розглянемо послідовність випадкових величин

$$\eta_1 = \eta_1(x),\ \eta_2 = \eta_2(x),\ ...,\ \eta_k = \eta_k(x), ...,$$

де $\eta_k(x)$ — кількість символів «$i_0$» на $k$-му місці розкладу Кантора числа $x$. Якщо $i_0 \geq 2$, то

| $\eta_1(x)$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| | 1 | 0 |

$\vdots$

| $\eta_{i_0-1}(x)$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| | 1 | 0 |

бо для факторіальної системи числення на 1, 2, ..., $(i_0-1)$-му місці розкладу символ «$i_0$» неможливий.

| $\eta_{i_0}(x)$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| | $\frac{i_0}{i_0+1}$ | $\frac{1}{i_0+1}$ |

| $\eta_k(x)$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| | $\frac{k}{k+1}$ | $\frac{1}{k+1}$ |

, $\forall k \geq i_0$.

Для довільної фіксованої цифри «$i_0$» випадкові величини $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_k, ...$ є незалежними і

$$M(\eta_k) = \frac{1}{k+1}, \quad k \geq i_0;$$
$$M(\eta_k{}^2) = \frac{1}{k+1};$$
$$D(\eta_k) = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{k}{(k+1)^2} < 1, \quad \forall k \in N.$$

Тому для $\{\eta_k\}$ можна застосувати посилений закон великих чисел. Тому з імовірністю 1 (для $\lambda$-майже всіх дійсних чисел $x \in [0;1]$):

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+...+\eta_k(x)}{k} - \frac{M\eta_1(x)+M\eta_2(x)+...+M\eta_k(x)}{k}\right) = 0.$$

Оскільки $\eta_1(x)+\eta_2(x)+...+\eta_k(x) = N_{i_0}(x,k)$, та

$$M\eta_1(x) = 0,\ M\eta_2(x) = 0, ...,\ M\eta_{i_0-1}(x) = 0,$$
$$M\eta_k(x) = \frac{1}{k+1}, \quad \forall k \geq i_0,$$

то

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{N_{i_0}(x,k)}{k} - \frac{0+0+...+0+\frac{1}{i_0+1}+\frac{1}{i_0+2}+...+\frac{1}{k+1}}{k}\right) = 0.$$

Оскільки послідовність $0, 0, ..., 0, \frac{1}{i_0+1}, \frac{1}{i_0+2}, ...$ збігається до нуля, то її середнє за Чезаро також збігається до нуля. Отже, для $\lambda$-майже всіх $x \in [0; 1]$:

$$\nu_{i_0}(x) = 0.$$

Позначимо $B_{i_0} := \{x : \nu_{i_0}(x) = 0\}$ і

$$B := \bigcap_{i_0=0}^{\infty} B_{i_0}.$$

Оскільки зчисленний переріз множин повної міри є множиною повної міри, то

$$\lambda(B) = 1,$$

що і треба було довести. □

## 4 Про суперфрактальність множини суттєво анормальних чисел, породжених факторіальним розкладом

**Означення 2.** Число $x$, записане у факторіальній системі числення, називається суттєво анормальним, якщо для довільного символа $i_0 \in N_0$ не існує границі

$$\lim_{k\to\infty} \frac{N_{i_0}(x,k)}{k}.$$

Позначимо через $L(F)$ множину суттєво анормальних чисел, породжених факторіальним розкладом.

**Теорема 8.** *Множина $L(F)$ суттєво анормальних чисел, породжених факторіальним розкладом, є суперфракталом, тобто її міра Лебега дорівнює нулю, але*

$$\dim_H L(F) = 1.$$

*Доведення.* Перше твердження теореми випливає безпосередньо з нормальних властивостей факторіальної системи числення, доведених у попередньому розділі.

Для доведення основного твердження теореми (про фрактальні властивості множини $L(F)$) використаємо підхід, винайдений Г. Торбіним у 1994 році для доведення суперфрактальності множини суттєво анормальних чисел для $s$-адичних розкладів, та модернізуємо його для факторіального розкладу. Отже, ми введемо в розгляд зчисленну кількість множин $V_m$ таких, що $V_m \subset L(F)$ і таких, що $\sup\limits_m (\dim_H V_m) = 1$. Цього, очевидно, достатньо для висновку про те, що $\dim_H L(F) = 1$. Отже, нехай

$$V_m := \left\{ \begin{array}{l} x : x = \Delta^F_{\underbrace{0\alpha_{1,1}...\alpha_{m,1}}_{\textit{перша серія}}\underbrace{001\alpha_{1,2}...\alpha_{2m,2}}_{\textit{друга серія}}\underbrace{0000112\alpha_{1,3}...\alpha_{4m,3}}_{\textit{третя серія}}...} \\ \qquad \underbrace{\overbrace{0...0}^{2^{k-1}}\overbrace{1...1}^{2^{k-2}}\overbrace{2...2}^{2^{k-3}}...(k-2)(k-2)(k-1)\alpha_{1,k}...\alpha_{2^{k-1}\cdot m,k}}_{k-\text{та серія}}... \end{array} \right\},$$

$\alpha_{i,j},\ i \in \{0, 1, ..., 2^{j-1} \cdot m\}$ можуть набувати довільних дозволених символів з відповідного алфавіту.

Тобто, якщо $x \in V_m$, то його факторіальний розклад має таку структуру: цей розклад умовно можна розбити на зчисленну кількість серій.

Перша серія розпочинається з фіксованого символа «0» , після чого йде серія з $m$ «плаваючих» символів $\alpha_{1,1}\alpha_{2,1}...\alpha_{m,1}$, тобто на другому, третьому, ..., $(m+1)$-му місці у розкладі числа $x$ може стояти довільний символ з дозволеного алфавіту:

$$\begin{aligned} \alpha_{1,1} &\in \{0, 1, 2\}; \\ \alpha_{2,1} &\in \{0, 1, 2, 3\}; \\ &\vdots \\ \alpha_{m,1} &\in \{0, 1, 2, ..., m+1\}. \end{aligned}$$

Друга серія розпочинається блоком з двох фіксованих символів «0» , потім — один фіксований символ «1» і серія з $2m$ «плаваючих» символів $\alpha_{1,2}\alpha_{2,2}...\alpha_{2m,2}$.

$$\vdots$$

$k$-та серія розпочинається з блоку $2^{k-1}$ фіксованих символів «0»;

$2^{k-2}$ фіксованих символів «1»;

$2^{k-3}$ фіксованих символів «2»;

$\vdots$

2 фіксованих символів «$k-2$»;

1 фіксованого символа «$k-1$»;

і серії з $2^{k-1} \cdot m$ «плаваючих» символів.

І так далі.

Використовуючи стандартні міркування, нескладно показати (див., наприклад, [3, 9, 10]), що $V_m \subset L(F),\ \forall m \in N$.

Позначимо множину номерів позицій, на яких стоять фіксовані символи у $k$-ій серії, через $A_k$; множину номерів позицій, на яких стоять «плаваючі» символи у $k$-ій серії, через $B_k$.

Зокрема, $A_1 = \{1\}, B_1 = \{2, 3, ..., m+1\}, A_2 = \{m+2, m+3, m+4\}, ...$ .

Нехай $A := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k, \quad B := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$ .

Нехай $t_k$ — номер позиції, на якій закінчується $k$-та серія, тоді

$$t_k = 2^{k+1} - k - 2 + m(2^k - 1) = 2^k \cdot (m+2) - k - m - 2.$$

Нехай $s_k$ — номер позиції, на якій закінчується $k$-та серія фіксованих символів. Тоді

$$s_k = t_{k-1} + 2^k - 1 = 2^{k-1} \cdot (m+4) - k - m - 2.$$

Для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича множини $V_m$ розглянемо випадкову величину

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{(k+1)!},$$

де $\{\xi_k\}$ — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають: одне фіксоване значення (описане в конструкції множини $V_m$) з імовірністю 1, якщо $k \in A$;

$(k+1)$ значення $0, 1, ..., k$ з імовірностями $\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1}, ..., \frac{1}{k+1}$ , якщо $k \in B$. Очевидно, що $V_m$ співпадає зі спектром $S_\xi$ випадкової величини $\xi$. Тому за теоремою 4 :

$$\dim_H V_m = \dim_H S_\xi = \varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln(m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_k)}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k)},$$

де $m_j$ — кількість ненульових ймовірностей у розподілі випадкової величини $\xi_j$. Тобто

$$m_j = \begin{cases} 1, & \text{якщо } j \in A, \\ j+1, & \text{якщо } j \notin A. \end{cases}$$

Тому

$$\dim_H V_m = \varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln(m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_k)}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k)} = \varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln(m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_{s_k})}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_{s_k})} =$$

$$= \varliminf_{k\to\infty} \frac{\sum\limits_{s=1}^{k-1} \ln\left(\prod\limits_{j\in B_s} n_j\right)}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_{s_k})} =$$

$$= \varliminf_{k\to\infty} \frac{\sum\limits_{l=1}^{k-1} \ln\left(\prod\limits_{j\in B_{k-l}} n_j\right)}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_{s_k})}.$$

Оскільки

$$\prod_{j\in B_{k-l}} n_j = \frac{\left(n_{t_{k-l}}\right)!}{\left(n_{s_{k-l}}\right)!} = \frac{(t_{k-l}+1)!}{(s_{k-l}+1)!},$$

то, беручи до уваги формулу Стірлінга

$$m! = \sqrt{2\pi m} \cdot \left(\frac{m}{e}\right)^m \cdot e^{\theta_m}, \text{ де } |\theta_m| < \frac{1}{12m},$$

отримуємо

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln\left(\prod\limits_{j\in B_{k-l}} n_j\right)}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_{s_k})} = \frac{m}{2^l \cdot (m+4)}$$

Отже,

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{\sum\limits_{l=1}^{k-1} \ln\left(\prod\limits_{j\in B_{k-l}} n_j\right)}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{s_k})} = \lim_{k\to\infty} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{m}{2^l \cdot (m+4)} = \frac{m}{m+4}$$

Оскільки $V_m \subset L(F), \forall m \in N$, то їх об'єднання має ту ж властивість. Оскільки $\sup\limits_m \dim_H(V_m) = \sup\limits_m \frac{m}{m+4} = 1$, то $\dim_H(L(F)) = 1$. □

## Подяка

Ця робота була частково підтримана грантом від Simons Foundation (1290607, Torbin G.) і Міністерством освіти і науки України (проєкти «Мультифрактальний аналіз ймовірнісних розподідів та їх застосування для моделювання складних динамічних систем» № 0122U000048 та «Динаміки комплексних систем на різних часових шкалах» № 0120U101662).

## Література


[1] Albeverio S., Garko I., Ibragim M., Torbin G. 2017. Non-normal numbers: full Hausdorff dimensionality vs zero dimensionality. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 141, no. 2. P. 1–19.

[2] Albeverio S., Ivanenko G., Lebid M., Torbin G. 2020. On the Hausdorff dimension faithfulness and the Cantor series expansion. *Methods of Functional Analysis and Topology*, 26, no. 4. P. 298–310.

[3] Albeverio S., Kondratiev, Yu., Nikiforov R., Torbin G. 2014. On fractal properties of non-normal numbers with respect to Rényif-expansions generated by piecewise linear functions. *Bull. Sci. math.*, 138. P. 440–455.

[4] Albeverio S., Kondratiev, Yu., Nikiforov R., Torbin G. 2017. On new fractal phenomena connected with infinite linear IFS. *Mathematische Nachrichten*, 290, no. 8-9. P. 1163–1176.

[5] Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G. 2011. On fine structure of singularly continuous probability measures and random variables with independent $\widetilde{Q}$-symbols. *Methods Funct. Anal. Topol.*, 17, no. 2. P. 97–111.

[6] Albeverio S., Lupain M., Nikiforov R., Torbin G. 2024. On preservation of singulaity, absolute continuity and discteteness under transfornations of probability spaces. *Interdisciplinary Studies of Complex Systems*, 25. P. 5–15.

[7] Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G. 2004. Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 24, no. 1. P. 1–16.

[8] Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G. 2008. Transformations preserving the Hausdorff–Besicovitch dimension. *Central European Journal of Mathematics*, 6, no. 1. P. 119–128.

[9] Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G. 2005. Topological and fractal properties of subsets of real numbers which are not normal. *Bull. Sci. math.*, 129, no. 8. P. 615–630.

[10] Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G. 2005. Singular probability distributions and fractal properties of sets of real numbers defined by the asymptotic frequencies of their s-adic digits. *Ukrainian Mathematical Journal*, 57, no. 9. P. 1263–1281.

[11] Albeverio S., Torbin G. 2005. Fractal properties of singularly continuous probability distributions with independent $Q^*$-digits. *Bull. Sci. Math.*, 129, no. 4. P. 356–367.

[12] Baek, I.S., Olsen, L. 2010. Baire category and extremely non-normal points of invariant sets of IFS's. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 27, no. 3. P. 935–943.

[13] Barreira L., Saussol B., Schmeling, J. 2002. Distribution of frequencies of digits via multifractal analysis. *Isr. J. Math.*, 97, no. 2. P. 410–438.

[14] Barreira L., Schmeling, J. 2000. Sets of "non-typical" points have full topological entropy and full Hausdorff dimension. *Isr. J. Math.*, 116. P. 29–70.

[15] Eggleston, H.G. 1949. The fractional dimension of a set defined by decimal properties. *Quart. J. Math. Oxford Ser.*, 20. P. 31–36.

[16] Hyde J., Laschos V., Olsen L., Petrykiewicz I., Shaw, A. 2010. Iterated Cesaro averages, frequencies of digits, and Baire category. *Acta Arith.*, 144, no. 3. P. 287–293.

[17] Olsen, L. 2004. Applications of multifractal divergence points to sets of numbers defined by their N-adic expansion. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, 136, no. 1. P. 139–165.

[18] Olsen, L. 2004. Applications of multifractal divergence points to some sets of d-tuples of numbers defined by their N-adic expansion. *Bull. Sci. Math.*, 128. P. 265–289.

[19] Olsen L., Winter, S. 2003. Normal and non-normal points of self-similar sets and divergence points of self-similar measures. *J. Lond. Math. Soc.*, 67, no. 1. P. 103–122.

[20] Pratsiovytyi M., Torbin G. 1995. Superfractality of the set of numbers having no frequency of n-adic digits, and fractal probability distributions. *Ukrainian Mathematical Journal*, 47, no. 7. P. 1113–1118.

[21] Šalát, T. 1966. A remark on normal numbers. *Rev. Roum. Math. Pures Appl.*, 11. P. 53–56.

[22] Torbin G. 2002. Fractal properties of the distributions of random variables with independent Q-symbols. *Transactions of the National Pedagogical University (Phys.-Math. Sci.)*, 3. P. 241–252.

[23] Torbin G. 2005. Multifractal analysis of singularly continuous probability measures. *Ukr. Math. J.*, 57, no. 5. P. 837–857.

[24] Torbin G. 2007. Probability distributions with independent Q-symbols and transformations preserving the Hausdorff dimension. *Theory Stoch. Process.*, 13. P. 281–293.

[25] Василенко В., Вороненко О., Пихтар М., Торбін Г. 2023. Про довірчість системи Q*-циліндрів для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича. *Interdisciplinary Studies of Complex Systems*, 23. P. 70–76.

[26] Василенко В., Міський В., Торбін Г. 2024. Умови фрактальної довірчості для сім'ї циліндрів, породжених $\widetilde{Q}$-зображенням дійсних чисел. *Interdisciplinary Studies of Complex Systems*, 25. P. 38–49.