Interdisciplinary Studies of Complex Systems
No. 27 (2025) 43–57

https://doi.org/10.31392/iscs.2025.27.043 UDC 519.21

On DP-transformations generated by distributions of random variables with independent $\widetilde{Q}$-symbols

Vladyslav Vasylenko[1]

Про DP-перетворення, що породжені розподілами випадкових величин з незалежними $\widetilde{Q}$-символами

Владислав Василенко

Abstract. The paper is devoted to the development of a probabilistic approach to the study of transformations preserving the Hausdorff–Besicovitch dimension (DP-transformations). The main attention is paid to DP-transformations generated by distribution functions of random variables with independent $\widetilde{Q}$-symbols. We found necessary and sufficient conditions for distribution functions of random variables with independent $\widetilde{Q}$-symbols to be DP-functions under the condition of separation from zero for elements of the stochastic matrices $\widetilde{Q}$ and $\widetilde{P}$.

Keywords: probability measures, Hausdorff–Besicovitch dimension, DP-transformations, faithful Vitaly coverings, random variables with independent $\widetilde{Q}$-symbols

2020 Mathematics Subject Classification: 11K55, 28A80, 60G30

Абстракт. Робота присвячена розвитку ймовірнісного підходу до дослідження перетворень, що зберігають розмірність Хаусдорфа–Безиковича (DP-перетврення). Основну увагу приділено DP-перетворенням, що породжуються функціями розподілу випадкових величин з незалежними $\widetilde{Q}$-символами. В роботі знайдено необхідні і достатні умови збереження розмірності Хаусдорфа–Безиковича функціями розподілу випадкових величин з незалежними $\widetilde{Q}$-символами при умові відділеності елементів стохастичних матриць $\widetilde{Q}$ та $\widetilde{P}$ від нуля.

Ключові слова: ймовірнісні міри, розмірність Хаусдорфа–Безиковича, DP-перетворення, довірчі системи покриттів, випадкові величини з незалежними $\widetilde{Q}$-символами

[1] Dragomanov Ukrainian State University, Kyiv, Ukraine. v.v.vasylenko@udu.edu.ua, https://orcid.org/0009-0008-2436-5799

1 Вступ

Нехай (M_1, ρ_1) і (M_2, ρ_2) метричні простори. Відображення f з метричного простору (M_1, ρ_1) в (M_2, ρ_2) називається відображенням, що зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича (DP-відображенням) на M_1, якщо

$$\dim_H(E) = \dim_H(f(E)) \ , \quad \forall E \subset M_1 \ .$$

Важливим є випадок, коли $(M_1, \rho_1) = (M_2, \rho_2)$. У цьому випадку говорять про DP-перетворення простору. Найпростішими прикладами DP-пертворень є бі-ліпишцеві перетворення до яких належать всі афінні перетворення. В роботі [1] запропоновано DP-підхід до фрактальної геометрії як математичної дисципліни, яка вивчає інваріанти групи DP-перетворень. У цій же роботі показано що дослідження групи неперервних DP-перетворень на R^1 еквівалентне дослідженню неперервних функцій розподілу випадкових величин на $[0, 1]$.

В роботах S. Albeverio, M. Працьовитого, Г. Торбіна (див. [3, 7, 9] та огляд літератури у цих роботах) знайдено необхідні і достатні умови збереження розмірності Хаусдорфа–Безиковича (див., наприклад, [5, 10, 20] для відповідних означень) функціями розподілу випадкових величин з незалежними s-адичними символами та з незалежними символами Q-зображення. У роботі [18] досліджувалися DP-властивості фрактальних ймовірнісних мір з незалежними Q-символами. У статті [17] досліджувалися DP-властивості функцій розподілу випадкових величин з незалежними $\widetilde{Q}$-символами розкладів Кантора. M. Ібрагімом та Г. Торбіним досліджувалися необхідні і достатні умови збереження розмірності Хаусдорфа–Безиковича функціями розподілу випадкових величин з незалежними Q^*-символами при умові відділеності елементів стохастичних матриць Q^* та P^* від нуля [15, 16]. Дослідження перетворень, що зберігають розмірність Хаусдорфа–Безиковича та їх властивостей представлено у роботах [8, 9, 12, 19]. Зауважимо, що для дослідження DP-перетворень критично важливими є результати досліджень з тонкого фрактального аналізу ймовірнісних мір (див., наприклад, [10] для відповідних означень і огляду) та результати щодо довірчості локально тонких систем покриттів для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича (див., наприклад, [11–14] та огляд літератури в цих роботах).

Існують сингулярно неперервні функції розподілу, що не зберігають міру Хаусдорфа, але при цьому зберігають розмірність Хаусдорфа–Безиковича [7]. У той же час, існують сингулярно неперервні DP-функції і абсолютно неперервні строго зростаючі функції, які не зберігають розмірність Хаусдорфа–Безиковича. У зв'язку з цим виникає питання розробки методів дослідження DP перетворень, та детальне дослідження окремих класів таких перетворень.

У даній роботі доведено загальні необхідні умови для того щоб функція розподілу випадкової величини з незалежними $\widetilde{Q}$-символами зберігала розмірність Хаусдорфа–Безиковича на $[0, 1]$. Знайдено необхідні і достатні умови збереження розмірності Хаусдорфа–Безиковича функціями розподілу випадкових величин з незалежними $\widetilde{Q}$-символами при умові відділеності елементів стохастичних матриць $\widetilde{Q}$ та $\widetilde{P}$ від нуля. Цей результат відображає теорема 2 і відповідні наслідки з неї.

2 DP-перетворення, що породжені розподілами випадкових величин з незалежними $\widetilde{Q}$-символами

Нехай $\{n_k\}$-послідовність натуральних чисел, $n_k \geq 2$, і нехай $\widetilde{Q}$-стохастична матриця $\widetilde{Q} = ||q_{ik}||$ (див. [4, 14]), така, що

1) $q_{ik} > 0, \quad \forall i \in \{0, 1, ..., n_k - 1\}, \ \forall k \in N;$

2) $\sum\limits_{i=0}^{n_k-1} q_{ik} = 1, \quad \forall k \in N;$

3) $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_{i} q_{ik} = 0.$

Розглянемо випадкову величину ξ з незалежними $\widetilde{Q}$-символами [4]:

$$\xi = \Delta^{\widetilde{Q}}_{\xi_1\xi_2...\xi_k...} \ ,$$

де $\{\xi_k\}$ — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень $0, 1, ..., n_k - 1$ з ймовірностями $p_{0k}, p_{1k}, ..., p_{(n_k-1)k}$ відповідно, $p_{ik} \geq 0, \ \sum\limits_{i=0}^{n_k-1} p_{ik} = 1.$

Знайдемо умови, при яких функція розподілу F_ξ зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича на $[0, 1]$. Зрозуміло, що властивості $F_\xi(x)$ визначаються матрицями $\widetilde{Q}$ та $\widetilde{P}$,

$$\widetilde{P} = ||p_{ik}||, \quad i \in \{0, 1, ..., n_k - 1\}, \quad k \in N.$$

Оскільки кожна DP-функція не має інтервалів постійності, то матриця $\widetilde{P}$ не містить нулів. Отже, спектр випадкової величини ξ співпадає з $[0, 1]$, тобто

$$\forall x \in [0, 1] \ , \quad \forall \varepsilon > 0 : \quad F_\xi(x + \varepsilon) - F_\xi(x - \varepsilon) > 0.$$

Теорема 1. *Нехай $F_\xi(x)$ — функція розподілу випадкової величини з незалежними $\widetilde{Q}$-символами, а ν_ξ — відповідна ймовірнісна міра. Якщо $F_\xi(x)$ зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича на $[0, 1]$, то*

$$\dim_H \nu_\xi = 1 \ ,$$

де

$$\dim_H \nu_\xi = \inf_{E \in B(\nu_\xi)} \{\dim_H E\},$$

$$B(\nu_\xi) = \{E : \quad \nu_\xi(E) = 1\}.$$

Доведення. Припустимо, що $F_\xi(x)$ зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича, але при цьому

$$\dim_H \nu_\xi = a_0 < 1 \ ,$$

де $a_0 = \inf\{\dim_H E\}$ і $\nu_\xi(E) = 1$. Тоді існує носій E_0 (не обов'язково замкнений) міри ν_ξ, такий що

$$\dim_H E_0 = a_1 \ ,$$

де $a_1 \in [a_0; 1)$, $\nu_\xi(E_0) = 1$. Оскільки $\nu_\xi(E) = \lambda(F_\xi(E))$, то

$$\nu_\xi(E_0) = \lambda(F_\xi(E_0)) = 1.$$

Отже

$$\dim_H(F_\xi(E_0)) = 1,$$

що приводить до протиріччя

$$1 = \dim_H(F_\xi(E_0)) \neq \dim_H E_0 = a_1 < 1.$$

Звідси випливає, що $F_\xi(x)$ не зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича, що суперечить умові теореми.

Отримана суперечність доводить теорему. $\square$

Теорема 2. *Нехай* $\inf\limits_{ik} p_{ik} > 0$ *і* $\inf\limits_{ik} q_{ik} > 0$. *Тоді функція розподілу випадкової величини* ξ *з незалежними* $\widetilde{Q}$*-символами зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку тоді і тільки тоді, коли*

$$\dim_H \nu_\xi = 1\ . \tag{1}$$

Доведення. Необхідність випливає з попередньої теореми.

Достатність. Якщо $\inf q_{ik} \geq q_0 > 0$, то $\{n_k\}$ обмежена. Справді, припустимо що $\{n_k\}$ необмежена. Тоді з неї можна виділити строго зростаючу підпослідовність $\{n_{k_s}\} \to +\infty$. Оскільки $\min\limits_i q_{ik} \leq \dfrac{1}{n_k}$, то $\min\limits_i q_{ik_s} \leq \dfrac{1}{n_{k_s}}$, що суперечить умові $q_{ik} \geq q_0 > 0$. Отже, $\exists n_0 : n_k \leq n_0$.

Покажемо, що при виконанні умов теореми, виконуються всі умови теореми про обчислення розмірності Хаусдорфа ймовірнісної міри з незалежними $\widetilde{Q}$-символами доведеної в роботі В. Василенка, Г. Торбіна [11].

Умова 1. Оскільки $\min\limits_i q_{ik} \geq q_0$, то $\max\limits_i q_{ik} \leq 1 - q_0$. Тоді,

$$Q_k := \prod_{j=1}^{k} \max_i q_{ij} \leq (1 - q_0)^k;$$

$$Q_k^\delta \leq \left((1 - q_0)^\delta\right)^k, \quad \forall \delta > 0.$$

Отже,

$$n_k \cdot Q_k^\delta \leq n_0 \cdot \left((1 - q_0)^\delta\right)^k \to 0, \quad k \to \infty,\ \forall \delta > 0.$$

Умова 2.

$$\sum_{k=1}^{\infty} Q_k^\delta \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left((1 - q_0)^\delta\right)^k < +\infty, \quad \forall \delta > 0.$$

Умови 3 і 4. Оскільки $n_k \leq n_0$, $q_{ik} \geq q_0$, $p_{ik} \geq p_0 > 0$, то послідовності $\{b_j\}$, $\{l_j\}$ та $\{d_j\}$ обмежені, де

$$h_j := -\sum_{i=0}^{n_j - 1} p_{ij} \ln p_{ij}, \quad b_j := -\sum_{i=0}^{n_j - 1} p_{ij} \ln q_{ij},$$

$$l_j := -h_j^2 + \sum_{i=0}^{n_j-1} p_{ij} \ln^2 p_{ij}, \quad d_j := -b_j^2 + \sum_{i=0}^{n_j-1} p_{ij} \ln^2 q_{ij}.$$

Тому $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{d_j}{j^2} < +\infty$, і $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{l_j}{j^2} < +\infty$.

Умова 5.

$$-\sum_{i=0}^{n_j-1} p_{ij} \ln q_{ij} = \sum_{i=0}^{n_j-1} p_{ij} \frac{1}{\ln q_{ij}} \geq$$

$$\geq \sum_{i=0}^{n_j-1} p_{ij} \ln \frac{1}{1-q_0} = \ln \frac{1}{1-q_0} \sum_{i=0}^{n_j-1} p_{ij} = \ln \frac{1}{1-q_0}.$$

Оскільки $B_n = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$, то $\frac{B_n}{n} = \frac{b_1 + ... + b_n}{n} \geq \ln \frac{1}{1-q_0} > 0$. Отже,

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{B_n}{n} \geq \ln \frac{1}{1-q_0} > 0.$$

Отже, за теоремою про обчислення розмірності Хаусдорфа ймовірнісної міри з незалежними $\widetilde{Q}$-символами розмірність Хаусдорфа міри ν_ξ дорівнює

$$\dim_H \nu \ = \ \varliminf_{n\to\infty} \frac{h_1 + h_2 + ... + h_n}{b_1 + b_2 + ... + b_n}, \tag{2}$$

де $h_k = -\sum\limits_{i=0}^{n_j-1} p_{ik} \ln p_{ik}$, і $b_k = -\sum\limits_{i=0}^{n_j-1} p_{ik} \ln q_{ik}$.

Тому

$$\dim_H \nu_\xi = 1 \Leftrightarrow \varliminf_{n\to\infty} \frac{h_1 + h_2 + ... + h_n}{b_1 + b_2 + ... + b_n} = 1.$$

Оскільки (див., напр., [20]) $0 \leq h_k \leq b_k, \ \forall k \in N$, тобто

$$-\sum_{i=0}^{s-1} p_{ik} \ln p_{ik} \leq -\sum_{i=0}^{s-1} p_{ik} \ln q_{ik},$$

то умова $\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{h_1 + h_2 + ... + h_n}{b_1 + b_2 + ... + b_n} = 1$ рівносильна існуванню границі

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h_1 + h_2 + ... + h_n}{b_1 + b_2 + ... + b_n} = 1. \tag{3}$$

Доведемо, що з відокремленості елементів матриць $\|q_{ik}\|$ та $\|p_{ik}\|$ від нуля та умови (1) випливає, що

$$\lim_{k\to\infty} \ \frac{\ln \nu_\xi(\Delta^{\widetilde{Q}}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)...\alpha_k(x)})}{\ln \lambda(\Delta^{\widetilde{Q}}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)...\alpha_k(x)})} = 1, \quad \forall x \in [0,1]. \tag{4}$$

З незалежності випадкових величин $\xi_1, \xi_2, ...$ випливає, що

$$\nu_\xi(\Delta^{\widetilde{Q}}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)...\alpha_k(x)}) = p_{\alpha_1(x)1}\ p_{\alpha_2(x)2}\ \cdots\ p_{\alpha_k(x)k}\ = \prod_{j=1}^{k} p_{\alpha_j(x)j}.$$

З властивостей $\widetilde{Q}$-зображення дійсних чисел [4] випливає, що

$$\lambda(\Delta^{\widetilde{Q}}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)...\alpha_k(x)}) = \prod_{j=1}^{k} q_{\alpha_j(x)j}.$$

Тому

$$\frac{\ln \nu_\xi(\Delta^{\widetilde{Q}}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)...\alpha_k(x)})}{\ln \lambda(\Delta^{\widetilde{Q}}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)...\alpha_k(x)})} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{k} \ln p_{\alpha_j(x)j}}{\sum\limits_{j=1}^{k} \ln q_{\alpha_j(x)j}}.$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ розглянемо дві множини:

$$M^+_\varepsilon = \{j\ :\ |q_{ij} - p_{ij}| \le \varepsilon,\ \forall i \in \{0, 1, ..., n_k - 1\}\};$$
$$M^-_\varepsilon = \{j\ :\ \exists i_0:\ |q_{ij} - p_{ij}| > \varepsilon\}.$$

Нехай

$$M^+_{\varepsilon,k} := M^+_\varepsilon \cap \{1, 2, ..., k\};$$
$$M^-_{\varepsilon,k} := M^-_\varepsilon \cap \{1, 2, ..., k\}.$$

Розглянемо функцію багатьох змінних $g(x) = g(x_0, x_1, ..., x_{n_k-1})$, де $x_i = q_{ik}$. Тоді, якщо $k \in M^-_\varepsilon$, то існує i_0 таке що $|x_{i_0} - q_{i_0k}| > \varepsilon$. Тоді

$$\rho(x, x_0) = \sqrt{\sum_{i=0}^{n_k-2} (x_i - q_{ik})^2} > \varepsilon.$$

Лема 1. *Нехай функція $g(x)$ неперервна на області визначення і $g(x) = 1$ тоді і тільки тоді коли $x \in A \subset D(g)$, тобто $g(x) < 1$, $\forall x \notin A$. Тоді $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \gamma = \gamma(\varepsilon)$ таке, що з умови $\rho(x, A) > \varepsilon$ випливає умова, що $g(x) \le 1 - \gamma$.*

Доведення Леми 1. Доведемо лему методом від супротивного. Припустимо, що існує $\varepsilon_0 > 0$ таке, що для будь-якого $\gamma > 0$ і з умови $\rho(x, A) > \varepsilon$ не випливає те, що $g(x) \le 1 - \gamma$. Тоді, існує $x(\gamma)$ таке, що $\rho(x, A) > \varepsilon_0$ і таке, що $g(x) > 1 - \gamma$.

Для даного ε_0 виберемо послідовність $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_k, ...$, де $\gamma_k = \dfrac{1}{2^k}$ і відповідну послідовність $x^{(k)} = x^{(k)}(\gamma)$ такі, що:

$$\begin{cases} \rho(x^{(k)}, A) > \varepsilon_0,\ \forall k \in N; \\ 1 - \dfrac{1}{2^k} < g(x^{(k)}) \le 1. \end{cases}$$

Оскільки $\rho(x^{(k)}, A) > \varepsilon_0,\ \forall k \in N$, то $x^{(k)} \notin A$. Послідовність $x^{(k)}$ обмежена в R^n, бо $0 \leq x_i \leq 1$, тому $x^{(k)}$ має хоча б одну граничну точку x^*. З послідовності $x^{(k)}$ можна вибрати збіжну підпослідовність $x^{(k_s)} \to x^*$. Тоді

$$1 - \frac{1}{2^{k_s}} \leq g(x^{(k_s)}) \leq 1.$$

Отже,

$$\lim_{s\to\infty} g(x^{(k_s)}) = 1.$$

Оскільки $g(x)$ неперервна, то

$$1 = \lim_{s\to\infty} g(x^{(k_s)}) = x^*.$$

Отже, оскільки $x^* \notin A$ і $g(x^*) = 1$, то отримали суперечність що і доводить лему. $\square$

Використовуючи Лему 1 покажемо, що $\frac{|M^-_{\varepsilon,n}|}{n} \to 0$, при $n \to \infty$. Якщо $k \in M^-_\varepsilon$, то $\exists \gamma = \gamma(\varepsilon)$ таке, що $g(x) \leq 1-\gamma$. Обравши $g(x) = \frac{h_k}{b_k}$ отримаємо $\frac{h_k}{b_k} \leq 1 - \gamma_k$. Тоді $h_k \leq (1-\gamma_k)b_k,\ \forall k \in M^-_\varepsilon$. Оскільки $\inf \gamma_k =: \gamma_0 > 0$, то можемо оцінити відношення між H_n і B_n для $k \in M^-_\varepsilon$.

$$\frac{H_n}{B_n} = \frac{\sum\limits_{j=1}^n h_j}{\sum\limits_{j=1}^n b_j} = \frac{\sum\limits_{j\in M^+_{\varepsilon,n}} h_j + \sum\limits_{j\in M^-_{\varepsilon,n}} h_j}{\sum\limits_{j=1}^n b_j} \leq \frac{\sum\limits_{j\in M^+_{\varepsilon,n}} b_j + (1-\gamma_0)\sum\limits_{j\in M^-_{\varepsilon,n}} b_j}{\sum\limits_{j=1}^n b_j} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{j=1}^n b_j - \gamma_0 \cdot |M^-_{\varepsilon,n}|}{\sum\limits_{j=1}^n b_j} = 1 - \gamma_0 \cdot \frac{\frac{|M^-_{\varepsilon,n}|}{n}}{\frac{\sum\limits_{j=1}^n b_j}{n}}.$$

Оскільки $\frac{B_n}{n} \geq \ln\frac{1}{1-q_0} > 0,\ \forall n \in N$ і $\frac{H_n}{B_n} \to 1$, при $n \to \infty$, то

$$\gamma_0 \cdot \frac{\frac{|M^-_{\varepsilon,n}|}{n}}{\frac{\sum\limits_{j=1}^n b_j}{n}} \to 0, \quad \text{при } n \to \infty.$$

Отже, $\frac{|M^-_{\varepsilon,n}|}{n} \to 0$, при $n \to \infty$.

Очевидно, що

$$\sum_{j\in M^+_{\varepsilon,k}} \ln\frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} + \sum_{j\in M^-_{\varepsilon,k}} \ln\frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} = -\ln \nu_\xi(\Delta^{\widetilde{Q}}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)}).$$

Якщо $j \in M^+_{\varepsilon,k}$, то

$$q_{\alpha_j(x)j} - \varepsilon \le p_{\alpha_j(x)j} \le q_{\alpha_j(x)j} + \varepsilon;$$

$$\frac{1}{q_{\alpha_j(x)j} + \varepsilon} \le \frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} \le \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j} - \varepsilon}.$$

Тому

$$-\ln \nu_\xi(\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)}) \le \sum_{j\in M^+_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j} - \varepsilon} + \sum_{j\in M^-_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} \le$$

$$\le \sum_{j\in M^+_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j} - \varepsilon} + |M^-_{\varepsilon,k}| \ln \frac{1}{p_*},$$

де $p_* = \inf\limits_{i,k} p_{ik} > 0$.

Нехай $q_* = \inf\limits_{i,k} q_{ik} > 0$. Виберемо довільне додатне ε з інтервалу $(0, \frac{q_*}{2})$.

Оскільки $\ln(1+t) \le t,\ \forall t > -1$, то

$$\ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j} - \varepsilon} = \ln \left(\frac{q_{\alpha_j(x)j}}{q_{\alpha_j(x)j} - \varepsilon} \cdot \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} \right) =$$

$$= \ln \left(1 + \frac{\varepsilon}{q_{\alpha_j(x)j} - \varepsilon} \right) + \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} \le \frac{\varepsilon}{q_{\alpha_j(x)j} - \varepsilon} + \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} \ .$$

Отже,

$$-\ln \nu_\xi(\Delta^{\widetilde{Q}}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)}) \le \sum_{j\in M^+_{\varepsilon,k}} \frac{\varepsilon}{q_{\alpha_j(x)j} - \varepsilon} + \sum_{j\in M^+_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} + |M^-_{\varepsilon,k}| \ln \frac{1}{p_*}.$$

Оцінимо вираз

$$\sum_{j\in M^+_{\varepsilon,k}} \frac{\varepsilon}{q_{\alpha_j(x)j} - \varepsilon} \ .$$

Оскільки

$$\varepsilon < \frac{1}{2} q_* \le \frac{1}{2} q_{\alpha_j(x)j},$$

то

$$q_{\alpha_j(x)j} - \varepsilon > q_{\alpha_j(x)j} - \frac{1}{2} q_* \ge q_* - \frac{1}{2} q_* = \frac{1}{2} q_*$$

$$\frac{\varepsilon}{q_{\alpha_j(x)j} - \varepsilon} \le \frac{\varepsilon}{\frac{1}{2} q_*} = \frac{2\varepsilon}{q_*}.$$

Тому

$$\sum_{j\in M^+_{\varepsilon,k}} \frac{\varepsilon}{q_{\alpha_j(x)j} - \varepsilon} \le \frac{2\varepsilon}{q_*} |M^+_{\varepsilon,k}| \ .$$

Тоді

$$-\ln \nu_\xi(\Delta^{\widetilde{Q}}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)}) \leq \frac{2\varepsilon}{q_*}|M^+_{\varepsilon,k}| + |M^-_{\varepsilon,k}| \ln \frac{1}{p_*} + \sum_{j\in M^+_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}}. \quad (5)$$

З іншого боку,

$$\forall j \in M^+_{\varepsilon,k} \quad : \quad p_{\alpha_j(x)j} \leq q_{\alpha_j(x)j} + \varepsilon,$$

тому

$$\frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} \geq \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j} + \varepsilon},$$

і

$$\ln \frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} \geq \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} + \ln\left(1 + \frac{-\varepsilon}{q_{\alpha_j(x)j} + \varepsilon}\right).$$

Так як $\ln(1-t) = -t + O(t^2)$, то

$$\ln\left(1 - \frac{\varepsilon}{q_{\alpha_j(x)j} + \varepsilon}\right) = -\frac{\varepsilon}{q_{\alpha_j(x)j} + \varepsilon} + O\left(\frac{\varepsilon}{q_{\alpha_j(x)j} + \varepsilon}\right)^2.$$

Очевидно, що

$$\frac{\varepsilon}{q_{\alpha_j(x)j} + \varepsilon} \leq \frac{\varepsilon}{q_{\alpha_j(x)j}} \leq \frac{\varepsilon}{q_*}.$$

Тому

$$\ln \frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} \geq \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} + \left(\frac{-\varepsilon}{q_*} + O(\varepsilon^2)\right).$$

і

$$\sum_{j\in M^+_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} + \sum_{j\in M^-_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} \geq$$

$$\geq \sum_{j\in M^+_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} + \left(\frac{-\varepsilon}{q_*}|M^+_{\varepsilon,k}| + |M^+_{\varepsilon,k}| O(\varepsilon^2)\right) + |M^-_{\varepsilon,k}| \ln \frac{1}{1-p_*},$$

Отже,

$$-\ln \nu_\xi(\Delta^{\widetilde{Q}}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)}) \geq \quad (6)$$

$$\geq \sum_{j\in M^+_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} + \left(\frac{-\varepsilon}{q_*} + O(\varepsilon^2)\right)|M^+_{\varepsilon,k}| + |M^-_{\varepsilon,k}| \ln \frac{1}{1-p_*}.$$

Як зазначалось вище,

$$-\ln \lambda(\Delta^{\widetilde{Q}}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)}) = -\ln \frac{1}{q_{\alpha_1(x)}\cdots q_{\alpha_k(x)}} =$$

$$\sum_{j\in M^+_{\varepsilon,k}} \ln\frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} + \sum_{j\in M^-_{\varepsilon,k}} \ln\frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}}.$$

Оскільки

$$\frac{1}{1-q_*} \leq \frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} \leq \frac{1}{q_*},$$

то

$$|M^-_{\varepsilon,k}|\ln\frac{1}{1-q_*} \leq \sum_{j\in M^-_{\varepsilon,k}} \ln\frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} \leq |M^-_{\varepsilon,k}|\ln\frac{1}{q_*},$$

і

$$|M^-_{\varepsilon,k}|\ln\frac{1}{1-q_*} \leq -\ln\lambda(\Delta^{\widetilde{Q}}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)}) - \sum_{j\in M^+_{\varepsilon,k}} \ln\frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} \leq |M^-_{\varepsilon,k}|\ln\frac{1}{q_*}.$$

Тому

$$-\ln\lambda(\Delta^{\widetilde{Q}}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)}) \geq \sum_{j\in M^+_{\varepsilon,k}} \ln\frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} + |M^-_{\varepsilon,k}|\ln\frac{1}{1-q_*}, \tag{7}$$

і

$$-\ln\lambda(\Delta^{\widetilde{Q}}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)}) \leq \sum_{j\in M^+_{\varepsilon,k}} \ln\frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} + |M^-_{\varepsilon,k}|\ln\frac{1}{q_*}. \tag{8}$$

Враховуючи (5) і (8), отримаємо наступну оцінку

$$\frac{-\ln\nu_\xi(\Delta^{\widetilde{Q}}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})}{-\ln\lambda(\Delta^{\widetilde{Q}}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})} \leq \frac{\sum\limits_{j\in M^+_{\varepsilon,k}} \ln\frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} + \frac{2\varepsilon}{q_*}|M^+_{\varepsilon,k}| + |M^-_{\varepsilon,k}|\ln\frac{1}{p_*}}{\sum\limits_{j\in M^+_{\varepsilon,k}} \ln\frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} + |M^-_{\varepsilon,k}|\ln\frac{1}{1-q_*}} =$$

$$= \frac{1 + \dfrac{\frac{2\varepsilon}{q_*}|M^+_{\varepsilon,k}|}{\sum\limits_{j\in M^+_{\varepsilon,k}} \ln\frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}}} + \dfrac{|M^-_{\varepsilon,k}|}{\sum\limits_{j\in M^+_{\varepsilon,k}} \ln\frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}}}\ln\frac{1}{p_*}}{1 + \dfrac{|M^-_{\varepsilon,k}|}{\sum\limits_{j\in M^+_{\varepsilon,k}} \ln\frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}}}\ln\frac{1}{1-q_*}} \leq$$

$$\leq \frac{1 + \dfrac{\frac{2\varepsilon}{q_*}|M^+_{\varepsilon,k}|}{\sum\limits_{j\in M^+_{\varepsilon,k}} \ln\frac{1}{1-q_*}} + \dfrac{|M^-_{\varepsilon,k}|}{\sum\limits_{j\in M^+_{\varepsilon,k}} \ln\frac{1}{1-q_*}}\ln\frac{1}{p_*}}{1 + \dfrac{|M^-_{\varepsilon,k}|}{\sum\limits_{j\in M^+_{\varepsilon,k}} \ln\frac{1}{q_{\alpha_j(x)j}}}\ln\frac{1}{1-q_*}} =$$

$$= \frac{1 + \dfrac{\dfrac{2\varepsilon}{q_*}}{\ln \dfrac{1}{1-q_*}} + \dfrac{\dfrac{|M^-_{\varepsilon,k}|}{k}}{\dfrac{|M^+_{\varepsilon,k}|}{k} \ln \dfrac{1}{1-q_*}} \ln \dfrac{1}{p_*}}{1 + \dfrac{\dfrac{|M^-_{\varepsilon,k}|}{k}}{\dfrac{1}{k} \sum\limits_{j \in M^+_{\varepsilon,k}} \ln \dfrac{1}{q_{\alpha_j(x)j}}} \ln \dfrac{1}{1-q_*}}.$$

Тому

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{\ln \nu_\xi(\Delta^{\widetilde{Q}}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})}{\ln \lambda(\Delta^{\widetilde{Q}}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})} \leq 1 + \frac{2\varepsilon}{q_*} \cdot \frac{1}{\ln \dfrac{1}{1-q_*}}, \quad \forall \varepsilon \in (0, \frac{q_*}{2}),\ \forall x \in [0;1].$$

Оскільки остання нерівність виконується для довільного $\varepsilon \in (0, \frac{q_*}{2})$, то

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{\ln \nu_\xi(\Delta^{\widetilde{Q}}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})}{\ln \lambda(\Delta^{\widetilde{Q}}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})} \leq 1, \quad \forall x \in [0;1]. \tag{9}$$

Аналогічно з (6) і (7) отримується оцінка

$$\frac{-\ln \nu_\xi(\Delta^{\widetilde{Q}}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})}{-\ln \lambda(\Delta^{\widetilde{Q}}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})} \geq$$

$$\geq \frac{\sum\limits_{j\in M^+_{\varepsilon,k}} \ln \dfrac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} + \left(\dfrac{-\varepsilon}{q_*}|M^+_{\varepsilon,k}| + |M^+_{\varepsilon,k}| O(\varepsilon^2)\right) + |M^-_{\varepsilon,k}| \ln \dfrac{1}{1-p_*}}{\sum\limits_{j\in M^+_{\varepsilon,k}} \ln \dfrac{1}{q_{\alpha_j(x)j}} + |M^-_{\varepsilon,k}| \ln \dfrac{1}{q_*}}.$$

Тому

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{-\ln \nu_\xi(\Delta^{\widetilde{Q}}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})}{-\ln \lambda(\Delta^{\widetilde{Q}}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})} \geq 1 + \frac{1}{\ln \dfrac{1}{q_*}} \left(O(\varepsilon^2) - \frac{\varepsilon}{q_*}\right), \forall \varepsilon > 0, \forall x \in [0;1].$$

З того, що остання нерівність виконується для довільного додатного ε випливає, що

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{-\ln \nu_\xi(\Delta^{\widetilde{Q}}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})}{-\ln \lambda(\Delta^{\widetilde{Q}}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})} \geq 1, \quad \forall x \in [0;1]. \tag{10}$$

Беручи до уваги нерівності (9) та (10), приходимо до висновку про те, що

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln \nu_\xi(\Delta^{\widetilde{Q}}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})}{\ln \lambda(\Delta^{\widetilde{Q}}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)})} = 1, \forall x \in [0,1].$$

Тоді, за теоремою Біллінгслі [6], отримуємо:

$$\dim_H(E, \Phi(\widetilde{Q}), \lambda) = \dim_H(E, \Phi(\widetilde{Q}), \nu)\ , \quad \forall E \subset [0,1],$$

де $\dim_H(E, \Phi(\widetilde{Q}), \lambda)$ — розмірність Хаусдорфа–Біллінгслі множини E відносно сімейства $\Phi(\widetilde{Q})$ циліндрів $\widetilde{Q}$-розкладу та міри Лебега λ, а розмірність $\dim_H(E, \Phi(\widetilde{Q}), \nu)$ — розмірність Хаусдорфа–Біллінгслі множини E відносно сімейства $\Phi(\widetilde{Q})$ циліндрів $\widetilde{Q}$-розкладу та ймовірнісної міри ν_ξ (див. [6]).

Оскільки елементи матриці $\widetilde{Q}$ відокремлені від нуля, то сімейство $\Phi(\widetilde{Q})$ є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку. Тому

$$\dim_H(E, \Phi(\widetilde{Q}), \lambda) = \dim_H(E, \Phi(\widetilde{Q}) = \dim_H(E), \quad \forall E \subset [0,1]. \tag{11}$$

З іншого боку,

$$\dim_H(E, \Phi(\widetilde{Q}), \nu) = \dim_H(F_\xi(E), F_\xi(\Phi(\widetilde{Q})), \lambda) \quad \forall E \subset [0,1]. \tag{12}$$

Зрозуміло, що F_ξ-образом сімейства $\Phi(\widetilde{Q})$ є сімейство $\Phi(\widetilde{P})$ циліндрів відповідного $\widetilde{P}$-розкладу (цей розклад отримується за тим же принципом, що і $\widetilde{Q}$-розклад, але замість стохастичної матриці $\widetilde{Q}$ використовується стохастична матриця $\widetilde{P}$). З відокремленості елементів матриці $\widetilde{P}$ від нуля випливає довірчість сімейства $\Phi(\widetilde{P})$ для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку. Тому

$$\dim_H(E, \Phi(\widetilde{Q}), \nu) = \dim_H(F_\xi(E), \Phi(\widetilde{P}), \lambda) = \dim_H(F_\xi(E)), \quad \forall E \subset [0,1]. \tag{13}$$

І, отже, з рівностей (11), (12) та (13), отримуємо

$$\dim_H E = \dim_H F_\xi(E), \ \ \forall E \subset [0,1],$$

тобто $F_\xi(x)$ є DP-перетворенням на одиничному відрізку. □

Наслідок 1. *Нехай* $\inf\limits_{ik} p_{ik} > 0$ *та* $\inf\limits_{ik} q_{ik} > 0$. *Тоді функція розподілу випадкової величини* ξ *з незалежними* Q^**-символами зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича на одиничному відрізку тоді і тільки тоді, коли*

$$\dim_H \nu_\xi = 1.$$

Доведення. Q^*-зображення є частковим випадком $\widetilde{Q}$-зображення. Тому теорема, яка правильна для загальнішого випадку, є правильною і для часткового. □

Наслідок 2. *Якщо 1)* $\exists q_0 > 0$ *таке, що* $q_{ik} \geq q_0,\ \forall i,k;$

2) Для довільної послідовності $\{i_k\}$, де $i_k \in \{0,1,...,n_k-1\}$ виконується умова

$$\lim_{k\to\infty} \frac{q_{i_k k}}{p_{i_k k}} = 1,$$

то F_ξ зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича на [0,1].

Доведення. З умови 2) випливає, що $\exists p_0 : p_{ik} \geq p_0 > 0$. Отже з умов 1), 2) і теореми випливає, що $F_\xi(x)$—DP перетворення тоді і тільки тоді коли $\dim_H \mu_\xi = 1$.

Покажемо, що при умовах 1) і 2) виконується $\dim_H \mu_\xi = 1$. Для цього досить показати, що $\frac{h_k}{b_k} \to 1$ при $k \to \infty$. Для довільного додатного ε $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) : \ \forall k > n_0, \ i_k \in \{0,1,...,n_k-1\}$

$$1-\varepsilon \leq \frac{q_{ik}}{p_{ik}} \leq 1+\varepsilon;$$

$$(1-\varepsilon)p_{ik} \leq q_{ik} \leq (1+\varepsilon)p_{ik};$$

$$\ln p_{ik} + \ln(1-\varepsilon)p_{ik} \leq \ln q_{ik} \leq \ln(1+\varepsilon) + \ln p_{ik};$$

$$p_{ik}\ln p_{ik} + p_{ik}\ln(1-\varepsilon)p_{ik} \leq p_{ik}\ln q_{ik} \leq p_{ik}\ln(1+\varepsilon) + p_{ik}\ln p_{ik};$$

$$\sum_{i=0}^{n_k-1} p_{ik}\ln p_{ik} + \ln(1-\varepsilon) \leq \sum_{i=0}^{n_k-1} p_{ik}\ln q_{ik} \leq \sum_{i=0}^{n_k-1} p_{ik}\ln p_{ik} + \ln(1+\varepsilon);$$

$$h_k + \ln(1-\varepsilon) \leq b_k \leq h_k + \ln(1+\varepsilon), \quad \forall\varepsilon > 0, \forall k > n_0(\varepsilon).$$

Отже,

$$1 + \frac{\ln(1-\varepsilon)}{h_k} \leq \frac{h_k}{b_k} \leq 1 + \frac{\ln(1+\varepsilon)}{h_k}.$$

Так як $q_{ik} > q_0$ і $p_{ik} \geq p_0$, то $p_{ik} \leq 1 - p_0$. Звідси h_k відокремлене від 0, тобто $\exists h_0 : h_k \geq h_0, \ \forall k$. Тоді,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{h_k}{b_k} = 1.$$

Отже,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{h_1 + h_2 + ... + h_k}{b_1 + b_2 + ... + b_k} = 1.$$

Звідси випливає що $\dim_H \mu_\xi = 1$ і $F_\xi(x)$—DP перетворення. □

Наслідок 3. *Нехай $\inf\limits_{ik} q_{ik} > 0, \ \forall i,k$. Тоді якщо F_ξ є абсолютно неперервною, то F_ξ зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича на [0;1].*

Доведення. Як відомо (див. [4]) випадкова величина ξ з незалежними $\widetilde{Q}$-символами має абсолютно неперервний розподіл тоді і тільки тоді, коли

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n_k-1} \sqrt{p_{ik} \cdot q_{ik}} \right) > 0,$$

звідси випливає, що

$$\sum_{i=0}^{n_k-1} \sqrt{p_{ik} \cdot q_{ik}} \to 1, \text{ при } k \to \infty.$$

Тому $p_{ik} \geq p_0 > 0$. Оскільки F_ξ є абсолютно неперервна, то $\dim \nu_\xi = 1$. Тому, за теоремою 2, F_ξ зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича. $\square$

Користуючись наслідком, легко будувати приклади як абсолютно неперервних так і сингулярно неперервних DP- функцій з незалежними $\widetilde{Q}$-символами.

Література

[1] Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G. 2004. Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff–Besicovitch dimension. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 24, no. 1. P. 1–16.

[2] Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G. 2008. Transformations preserving the Hausdorff–Besicovitch dimension. *Cent. Eur. J. Math.*, 6, no. 1. P. 119–128.

[3] Albeverio S., Torbin G. 2005. Fractal properties of singularly continuous probability distributions with independent Q^*-digits. *Bull. Sci. Math.*, 129. P. 356–367.

[4] Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G. 2011. On fine structure of singularly continuous probability measures and random variables with independent $\widetilde{Q}$-symbols. *Methods of Functional Analysis and Topology*, 17, no. 2. P. 97–111.

[5] Besicovitch, A. 1952. On existence of subsets of finite measure. *Indag. Math.*, 14. P. 339–344.

[6] Billingsley, P. 1961. Hausdorff dimension in probability theory II. *Ill. J. Math.*, 5. P. 291–298.

[7] Falconer, K. J. 1990. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. John Wiley and Sons.

[8] Garko I., Nikiforov R., Torbin G. 2017. On the G-isomorphism of probability and dimensional theories of representations of real numbers and fractal faithfulness of systems of coverings. *Theory Probab. Math. Statist.*, 94. P. 17–36.

[9] Torbin G. 2007. Probability distributions with independent symbols and transformations preserving the Hausdorff dimension. *Theory Stoch. Process.*, 13, no. 2. P. 281–293.

[10] Torbin G. 2005. Multifractal analysis of singularly continuous probability measures. *Ukrainian Math. J.*, 57, no. 5. P. 837–857.

[11] Torbin G., Vasylenko, V. 2026. On fractal faithfulness and fne fractal properties of random variables with independent $\widetilde{Q}$-digits. *Submitted to Methods Funct. Anal. Topology*, preprint ArXiv.org.

[12] Torbin G., Voloshyn, Yu. 2025. On faithfulness, DP-transformations and Cantor series expansions. *Methods Funct. Anal. Topology*, 31. P. 360–370.

[13] Vasylenko V., Voronenko O., Pykhtar M., Torbin G. 2023. Faithfulness of system of Q^*-cylinders for calculation of Hausdorff–Besicovitch dimension. *Interdiscip. Stud. Complex Syst.*, 23. P. 70–76.

[14] Vasylenko V., Miskyi V., Torbin G. 2024. On conditions of fractal faithfulness for the family of cylinders generated by a $\tilde{Q}$-representation. *Interdiscip. Stud. Complex Syst.*, 25. P. 38–49.

[15] Ібрагім М., Торбін, Г. 2014. Про DP-перетворення, породжені випадковими величинами з незалежними Q^*-символами. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки*, 16. P. 134–143.

[16] Ібрагім М., Торбін, Г. 2015. Про ймовірнісний підхід до DP-перетворень та довірчості систем покриттів для обчислення розмірності. *Теорія ймовірностей та математична статистика*, 92. P. 29–40.

[17] Лебідь М., Торбін, Г. 2013. Про DP-перетворення, породжені випадковими величинами з незалежними С-символами. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки*, 14. P. 240–252.

[18] Торбін, Г. М. 2008. Про DP-властивості фрактальних ймовірнісних мір з незалежними Q-символами. *Доповіді НАНУ*, no. 4. P. 44–50.

[19] Торбін, Г. М. 2007. Ймовірнісний підхід до перетворень, що зберігають фрактальну розмірність. *Математичний вісник Наукового Товариства імені Т. Шевченка*, no. 4. P. 275–283.

[20] Турбин, А. Ф., Працевитый, Н. В. 1992. Фрактальные множества, функции, распределения. К: Наук. думка. 208 с.