Interdisciplinary Studies of Complex Systems
Vol. 1, No. 1 (2012) 81–84

Многокомпонентные случайные системы

Р. А. Минлос

От редакции. Редакция журнала обратилась к руководителю всемирно известной Добрушенской лаборатории Института Проблем Передачи Информации РАН Роберту Адольфовичу Минлосу с просьбой рассказать о научном направлении работы лаборатории, наиболее значимых результатах, полученных сотрудниками лаборатори, о том, какую роль играет сегодня математика в науке в целом. Данная публикация представляет ответы на эти вопросы.

Многокомпонентные случайные системы, — наименование одной из основных тем Добрушенской лаборатории ИППИ. Наименование — крайне удачное и емкое — было введено Р. Л. Добрушеным и объединяет многие направления, изучающие «большие» системы, т.е. системы с большим (в идеале бесконечным) числом элементов. В качестве примеров таких систем можно указать модели стохастической физики или квантовой теории поля, системы сетей связи, модели популяционной генетики, экологические модели и др.

Если говорить об основных особенностях этой науки, то следует привести характерные черты как самих многокомпонентных систем, так и принятых подходов к их изучению. Главная особенность таких систем проявляется (при некоторых условиях) в их «коллективном» поведении, возникающим из-за сильной скоррелированности всех элементов системы. Это приводит к таким, например, явлениям как фазовый переход, когда при незначительном изменении параметров системы она претерпевает резкую качественную перестройку своего состояния.

Другая важная черта больших систем, связанная уже со способом их описания и исследования, состоит во введение в это описание вероятностных представлений. Эта идея, впервые появившаяся в работах Больцмана, Максвелла и Гиббса, предлагает вместо того, чтобы детально следить за поведением каждой отдельной конфигурации элементов системы, ввести по определенному правилу распределение вероятностей на совокупности всех таких конфигураций, и изучать уже свойства этого распределения и, в частности, его эволюцию со временем. Такой подход избавляет нас от огромной и практически недоступной человеку информации, с которой пришлось бы оперировать при индивидуальном изучении каждой конфигурации. При этом львиная часть такой информации оказывается бесполезной, если нас интересует поведение системы «в целом», т.е. поведение ее наиболее вероятных (относительно введенного распределения) конфигураций...

Еще одна важная установка всех математических исследований многокомпонентных систем состоит в следующем. Исходная система всегда конечна — состоит из N элементов и исходное ее описание (пространство конфигураций, распределение вероятностей на этом пространстве и т.д.) приспособлено именно к этому конечному случаю. Затем — поскольку N все-таки велико — для многих величин и соотношений, характеризующих состояние конечной системы, рассматривают их ассимптотику при N, стремящемся к бесконечности (этот предельный переход называют термодинамическим переходом). Естественно возникает мысль о том, чтобы построить некую идеализированную предельную систему с бесконечным числом элементов, т.е. предельное пространство их конфигураций и предельное распределение вероятностей на нем, так, чтобы асимптотические значения тех или иных величин, вычисляемых для конечной системы, совпали с соответствующими значениями, вычисленными уже для предельной системы. В большинстве математических работ по многокомпонентным системам это предельное образование так или иначе присутствует.

Что касается контретных направлений и тем из теории многокомпонентных систем, которыми занимаются в нашей лаборатории последнии годы и полученных результатах, то я хочу остановиться на следующих:

Статистическая физика. Исследовались предельные гиббсовские поля на решетке для некоторых сложных моделей; изучался модельный механизм формирования и роста кристаллов; были описаны и классифицированы связные состояния трансфер-матриц для двумерных и трехмерных решетчатых спиновых моделей; была вычислена высокотемпературная асимптотика убывания корреляций между далеко отстающими друг от друга спинами в модели Изинга.

Модели квантовой теории поля и квантовой теории твердого тела. Здесь были изучены нижние ветви спектра гамильтонианов в следующих моделях: модель Паули-Фирца (модель электромагнетизма); модель Нельсона (квантовая частица в безмассовом бозонном поле); модель полярона (электрон в бозонном поле); модель спин-бозона (единичный спин в бозонном поле). Во всех этих моделях были построены основные состояния и нижние (одночастные) ветви спектра возбуждений.

Теория сетей связи. Для больших сетей связи исследовались вопросы, связанные с т.н. пуассоновской гипотезой о том, что при низкой нагрузке сети ее элементы (серверы) почти независимы. Эта гипотеза была действительно подтверждена и, сверх того, было установлено, что для случая высокой нагрузки у некоторых классов цепей возникает сильная корреляция между элементами, что приводит к колебательному режиму в работе сети. Эта картина аналогична явлению фазового перехода в физике.

Стохастические динамики. Под стохастической динамикой обычно подразумевают какой-нибудь марковский процесс, имитирующий так или иначе определенную детерминированную динамику большой системы. Будучи удачно подобранным, этот марковский процесс хорошо улавливает свойства соответсвующей детерминированной динимики. Вот примеры стохастических динамик, изучавшихся в нашей лаборатории:

— стохастические динамики для бесконечного неидеального газа. Наиболее простым и хорошо изученным является т.н. «процесс рождения-гибели», в котором частицы могут лишь случайно рождаться в какой-нибудь точке пространства и затем, оставаясь все время в одном и том же месте, случайно гибнуть. Были изучены спектральные свойства генератора такой динамики, асимптотика убывания корреляций в ней и рассмотрены некоторые их применения в смежных науках (популяционная генетика, экология). Ряд методов и приемов, возникших при изучении такой динамики, успешно применяются в теории обработки изображения.

— другой пример стохастической динамики — это т.н. процесс с запретами в непрерывном пространстве (прежде такой процесс изучался всегда для решетчатых моделей). Следует также упомянуть интересную конструкцию стохастической динамики в пространстве бесконечных диаграмм Юнга. Полученные здесь результаты тесно связаны с теорией представлений бесконечной симметрической группы. Еще один пример изучавшейся у нас стохастической динамики — модель автомобильных потоков вдоль шоссе (стационарный режим, вероятности пробок и т.д.).

Эргодическая теория. Здесь довольно интенсивно изучались так называемые хаотические динамики. Под этим понимают такой класс динамических систем, траектории которых довольно густо покрывают все пространство динамической системы и тем самым подобны траекториям случайных процессов.

Следует так же отметить, что в нашей лаборатории рассматривались случайные блуждания одной или двух частиц в случайной среде. Рассматривались случайные блуждания по d-мерной решетке при фиксированной конфигурации случайного поля (среды) на этой решетке, меняющейся со временем.

Для полноты представления об общей многокомпонентной тематике, я хочу привести еще несколько сюжетов, традиционно причисляемых к этому направлению, хотя и не рассматриваемых в нашей лаборатории: редуцированное описание эволюции больших систем (уравнения гидродинамики, уравнение Больцмана и т.д.); детерминированная динамика бесконечного газа; ансамбль случайных матриц большого порядка; теория ренормгруппы; интегрируемые системы математической физики; спектральная теория для систем со случайным взаимодействием.

Рассказывая о нашей лаборатории, ее тематике и результатах, нельзя не обратиться к истории, так как многокомпонентная тематика лаборатории имеет своим истоком многолетнюю работу семинара по статистической физике на механико-математическом факультете МГУ (1962–1994 гг., руководители Р. Л. Добрушин, Р. А. Минлос, В. А. Малышев, Я. Г. Синай). На этом семинаре было получено много первокласных результатов и возникло немало замечательных концепций и понятий. Здесь я приведу три на мой взгляд самых сильных работы, полученных на семинаре за все время его существования. Предельное распределение Гиббса. В начале своего рассказа, я уже говорил о том, что в работах по многокомпонентным системам стало обычаем обращаться к некоторой предельной системе. Впервые такой подход был предложен в шестидесятые годы прошлого века применительно к моделям равновесной статистической физики. В наиболее полном виде он был сформулирован в работах Р. Л. Добрушина, О. Ландфорда и Д. Рюэля и с тех пор известен под аббревиатурой ДЛР. Р. Л. Добрушин подробно изучил связанные с этим подходом понятия и конструкции и их разнообразные применения. Теория фазовых переходов. Такая теория была развита С. А. Пироговым и Я. Г. Синаем применительно к низкотемпературному решетчатому газу частиц с конечным числом состояний каждой отдельной частицы («конечный спин»). Построения этой теории существенно использует т.н. контурный метод, впервые примененный Р. Пайерлсом и усовершенствованный в работах Р. А. Минлоса и Я. Г. Синая. В дальнейших работах российских и зарубежных авторов теория Пирогова–Синая была обобщена на случай систем с бесконечными и даже непрерывными значениями спина. Хотя и существуют разные обходные (и более простые) методы установления фазового перехода, подход по теории Пирогова-Синая позволяет получить полную картину этого явления. «Капля» Вульфа. Рассмотрим решетчатый газ частиц при низкой температуре T, заключенный, скажем в квадрат $L \times L$ на двумерной решетке и имеюший фиксированную плотность r. Тогда при достаточно малых r типичная конфигурация состоит из мелких ($\ln L$) капелек, плавающих в пустоте. При возрастании плотности r после достижения некоторого порога $r'(T)$ в типичной конфигурации газа появляются единственная макроскопических размеров концентрация частиц — «капля», случайно расположенная в квадрате. Этот результат был получен Р. А. Минлосом и Я. Г. Синаем в шестидесятые годы. Через 20 лет Р. Л. Добрушин, Р. Котецкий и С. Б. Шлосман обратились снова к изучению «капли» и вывели, что ее форма имеет вид выпуклой фигуры, известной как «овал Вульфа» (напомним, что Вульф установил такую форму для «капли» из чисто феноменологических представлений). Результат Добрушена, Котецкого и Шлосмана, изложение которого заняло целую книгу, показывает мощь современной математической физики: с их помощью можно установить довольно тонкие факты, исходя из первоначальных физических постулатов.

Что касается вопроса о тенденции развития естественных наук и роли математики в этом развитии и, в частности, многокомпонентной тематики, то тема эта слишком обширна и мне вряд ли удастся ее объять. Могу только заметить, что сегодня в нашей лаборатории кроме всей «многокомпонентности» развиваются и многие другие направления: алгебра во всех ее разновидностях, теория информации, теория кодирования, математическая логика... Наряду с математиками старшего поколения у нас работает много талантливых молодых людей.

На вопрос о том, «растворяет» ли сегодня математика в себе философию, переводя вопросы веры и феноменологических представлений в конкретное знание, я могу ответить следующее: я часто размышляю о математике как об одном из способов постижения мира. Пока людям доступна лишь часть математики, применимая главным образом к описанию и изучению нашего мира. И то пока только к некоторым его областям. Однако, в современной математике уже есть много реалий, к нашей действительности повидимому не приложимых, но заставляющих думать о других мирах, организованных возможно иначе, чем наш, где все эти абстрактные структуры находят предметные воплощения.

Что касается других человеческих приемов познания, — в частности, философии, то мне она представляется далекой от математики. Философия есть способ логически зафиксировать то изумление, которое охватывет нас, когда мы задумываемся о природе всего сущего,- откуда и как оно пришло и почему, т.е. задумываемся о природе Бога. Поэтому, я бы отнес философию к некой разновидности поэзии.