

ON CONDITIONS OF FRACTAL FAITHFULNESS FOR THE FAMILY OF CYLINDERS GENERATED BY A $\tilde{Q}$ -REPRESENTATION

Vladyslav Vasylenko^{1,2}, Vadym Miskyi^{1,3}, Grygoriy Torbin^{1,4}

УМОВИ ФРАКТАЛЬНОЇ ДОВІРЧОСТІ ДЛЯ СІМ'Ї ЦИЛІНДРІВ, ПОРОДЖЕНИХ $\tilde{Q}$ -ЗОБРАЖЕННЯМ

Владислав Василенко, Вадим Міський, Григорій Торбін

Abstract. The paper is devoted to the development of methods of proving the faithfulness for the determination of the Hausdorff-Besicovitch dimension of Vitaly coverings of the unit interval. General sufficient conditions for the faithfulness of the family $\tilde{Q}$ of cylinders generated by $\tilde{Q}$ -expansions for the Hausdorff-Besicovitch dimension calculation of real numbers are proven.

Keywords: probability measures, Hausdorff-Besicovitch dimension, $\tilde{Q}$ -expansions of real numbers, faithful Vitaly coverings

2020 Mathematics Subject Classification: 11K55, 26A30, 28A80, 60E10

Абстракт. Робота присвячена розвитку методів доведення довірчості для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича локально тонких систем покриттів одиничного відрізка. В роботі доведено загальні достатні умови довірчості для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича системи $\tilde{Q}$ -циліндричних відрізків, породжених $\tilde{Q}$ -розкладами дійсних чисел.

Ключові слова: ймовірнісні міри, розмірність Хаусдорфа–Безиковича, $\tilde{Q}$ -розклади дійсних чисел, довірчі локально тонкі системи покриттів

1 Вступ

Поняття розмірності Хаусдорфа зараз добре відоме і має велике значення в математиці, а також у різноманітних прикладних задачах [8, 14, 16, 20]. Проте задача обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича множини або міри, будучи однією з основних задач фрактального аналізу,

¹ Dragomanov Ukrainian State University, Kyiv, Ukraine

² v.v.vasylenko@udu.edu.ua, <https://orcid.org/0009-0008-2436-5799>

³ v.v.miskyi@udu.edu.ua

⁴ g.m.torbin@npu.edu.ua, <https://orcid.org/0000-0003-3088-1614>

є досить не тривіальною проблемою, розв'язанню якої для різних множин та мір присвячено значну кількість дослідницьких статей (див. [1, 3–6, 15, 17, 18, 21–23] та огляд літератури до даних робіт). Це стало причиною розвитку методів знаходження точних або хоча б наближених значень розмірності Хаусдорфа–Безиковича. Один з таких методів полягає у суттєвому зменшенні класу допустимих покриттів при обчисленні розмірності до деякого зчисленного класу покриттів, який є довірчим для правильного обчислення розмірності.

Нагадаємо означення міри Хаусдорфа–Безиковича та поняття довірчості для локально тонкої сім'ї покриттів.

Нехай (M, ρ) — метричний простір. Діаметром обмеженої множини E називають число $|E| = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in E\}$. Нехай $\varepsilon > 0$.

Означення 1. Не більш ніж зліченна сукупність множин $\{E_j\}$ така, що $|E_j| \leq \varepsilon$, $(\bigcup_j E_j) \supset E$ називається ε -покриттям множини E .

Сімейство Φ підмножин метричного простору (M, ρ) називається локально тонкою системою покриттів обмеженої множини W , якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке покриття множини W підмножинами $E_j \in \Phi$, що $|E_j| \leq \varepsilon$ і $W \subset \bigcup_j E_j$.

Означення 2. Нехай α та ε — додатні числа. Тоді α -мірною ε -передмірою Хаусдорфа (передмірою Хаусдорфа) обмеженої множини E називається число

$$H_\varepsilon^\alpha(E) = \inf_{|E_j| \leq \varepsilon} \left\{ \sum_j |E_j|^\alpha \right\}$$

Означення 3. Нехай α — додатне число. α -мірною мірою Хаусдорфа (α -мірою Хаусдорфа) обмеженої множини E називається число

$$H^\alpha(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_\varepsilon^\alpha(E).$$

Означення 4. Невід'ємне число

$$\dim_H(E) := \inf\{\alpha : H^\alpha(E) = 0\}$$

називається розмірністю Хаусдорфа–Безиковича множини $E \subset M$.

Нехай α — деяке додатне число. Тоді α -мірною мірою Хаусдорфа множини E відносно сімейства Φ називається

$$H^\alpha(E, \Phi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\inf_{|E_j| \leq \varepsilon} \left\{ \sum_j |E_j|^\alpha \right\} \right],$$

де інфімум береться за всіма не більш як зліченими ε -покриттями $\{E_j\}$ множини E множинами $E_j \in \Phi$.

Означення 5. Розмірністю Хаусдорфа–Безиковича множини E відносно сімейства підмножин Φ називається таке невід’ємне число, що

$$\dim_H(E, \Phi) = \inf\{\alpha : H^\alpha(E, \Phi) = 0\}.$$

Означення 6. Локально тонка система покриттів Φ називається довірчою системою покриттів на W , якщо при обчисленні розмірності Хаусдорфа–Безиковича довільної підмножини з W можна обмежитись розглядом покриттів з Φ , тобто якщо

$$\dim_H(E, \Phi) = \dim_H(E), \forall E \subset W.$$

Вивчення довірчості локально тонких сімей циліндричних покриттів відіграють важливу роль у дослідження фрактальних властивостей. Умови при яких локально тонка сім’я циліндричних покриттів є довірчою для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича досліджувались в різних роботах [7, 12, 13]. Перші дослідження у цьому напрямку зробив А.С. Безикович [10] довівши довірчість сім’ї циліндричних відрізків двійкового представлення. П. Біллінслей [11] довів довірчість для сімейств циліндрів, що породжуються s -адичним представленням, М. В. Працьовитий [21] для сімейств покриттів, що породжуються Q -представленням, С. Альбеве́рію та Г. М. Торбін [7] для сімейств покриттів, що породжуються Q^* -представленням для яких $\inf_k \{q_{0k}, q_{(n-1)k}\} > 0$. В роботі [15] знайдено значно загальніші достатні умови для довірчості сім’ї циліндрів Q^* -представлення. В роботі [23] узагальнено результати роботи [15] і висунуто гіпотезу щодо необхідних і достатніх умов довірчості сім’ї циліндрів Q^* -представлення.

Досить цікавим є те, що початкові приклади недовірчих сімейств покриттів вперше з’явилися в двовимірному випадку в результаті активних досліджень самоафінних множин протягом останнього десятиліття ХХ ст [9]. Одним із перших прикладів одновимірного недовірчого сімейства локально тонких покриттів можна вважати сімейство циліндричних відрізків класичного ланцюгового розкладу дійсних чисел [19]. В роботі [1] використовуючи підхід, який був винайдений Ю. Пересом для доведення недовірчості сімейства циліндричних відрізків, породжених ланцюговими дробами, було доведено недовірчість сімейства циліндричних відрізків для Q_∞ -розкладу з поліноміально спадними елементами $\{q_i\}$. Питання довірчості систем покриттів що породжуються зображенням дійсних чисел зі скінченним алфавітом, або таких що задовольняють додаткові BVC-умови (bounded Vitali covering) вивчалось в роботі [13].

2 Нові достатні умови довірчості для сім’ї $\tilde{Q}$ -циліндрів

Нагадаємо поняття $\tilde{Q}$ -розкладу дійсних чисел одиничного відрізка. Нехай $\tilde{Q}$ — стохастична матриця $\tilde{Q} = \|q_{ik}\|$, така, що

- 1) $q_{ik} > 0, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n_k - 1\}, \quad \forall k \in N;$
- 2) $\sum_{i=0}^{n_k-1} q_{ik} = 1, \quad \forall k \in N;$

$$3) \prod_{k=1}^{\infty} \max_i q_{ik} = 0.$$

За допомогою матриці $\widetilde{Q}$ отримується $\widetilde{Q}$ -розклад числа x :

$$x = \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} \beta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)j},$$

де

$$\beta_{\alpha_k(x)} = \begin{cases} 0, & \alpha_k(x) = 0; \\ \sum_{i=0}^{\alpha_k(x)-1} q_{ik}, & \alpha_k(x) > 0. \end{cases}$$

Формальний запис:

$$x = \Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_k(x)\dots}^{\widetilde{Q}}$$

$\widetilde{Q}$ представлення дійсних чисел дозволяє формально просто задавати і досліджувати широкий клас одновимірних фракталів та інших об'єктів з фрактальними властивостями.

Теорема 1. Нехай $q_k^* := \max\{q_{0k}, q_{1k}, \dots, q_{(n_k-1)k}\}$. Якщо

$$\begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln q_{0k}}{\ln(q_1^* \cdot q_2^* \cdot \dots \cdot q_k^*)} = 0, & (*) \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln q_{(n_k-1)k}}{\ln(q_1^* \cdot q_2^* \cdot \dots \cdot q_k^*)} = 0, & (**) \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln n_k}{\ln(q_1^* \cdot q_2^* \cdot \dots \cdot q_k^*)} = 0, & (***) \end{cases}$$

то

$$\dim_H(E) = \dim_H(E, \Phi(\widetilde{Q})), \quad \forall E \subset [0, 1].$$

Доведення. Нехай E_j — довільне ε -покриття множини E відрізками $E_j = [a_j, b_j]$. І нехай $\Delta_{m_j} := \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{m_j}} - \widetilde{Q}$ -циліндр, який повністю належить відріzkу $[a_j, b_j]$ і такий, що не існує циліндрів попереднього рангу, що належать $[a_j, b_j]$:

$$\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{m_j}} \subset [a_j, b_j], \quad \text{але} \quad \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{m_j-1}} \not\subset [a_j, b_j].$$

Існує не більше як $(n_{m_j} - 1)$ циліндрів рангу m_j , які лежать правіше за Δ_{m_j} і належать до E_j . Існує не більше як $(n_{m_j} - 1)$ циліндрів рангу m_j , які лежать лівіше за Δ_{m_j} і належать до E_j . Тобто існує не більше як $2(n_{m_j} - 1)$ циліндрів рангу m_j , які належать до E_j .

α -об'єм цих циліндрів дорівнює:

$$\sum_i |\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{m_j-1}i}|^\alpha + \sum_h |\Delta_{\beta_1\beta_2\dots\beta_{m_j-1}h}|^\alpha,$$

де підсумовування ведеться по таких i та h , для яких:

$$\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{m_j-1}i} \subset [a_j, b_j] \quad \text{та} \quad \Delta_{\beta_1\beta_2\dots\beta_{m_j-1}h} \subset [a_j, b_j].$$

Так як $|\Delta_{m_j}| \leq q_1^* \cdot q_2^* \cdot \dots \cdot q_{m_j}^*$, то для першої з сум

$$\begin{aligned} \sum_i |\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{m_j-1} i}|^\alpha &= \sum_i |\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{m_j-1} i}|^{\alpha-\delta} |\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{m_j-1} i}|^\delta \leq \\ &\leq \sum_i |E_j|^{\alpha-\delta} |\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{m_j-1} i}|^\delta \leq \\ &\leq |E_j|^{\alpha-\delta} (n_{m_j} - 1) (q_1^* \cdot q_2^* \cdot \dots \cdot q_{m_j}^*)^\delta. \end{aligned}$$

Аналогічно для другої суми

$$\sum_h |\Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{m_j-1} h}|^\alpha \leq |E_j|^{\alpha-\delta} (n_{m_j} - 1) (q_1^* \cdot q_2^* \cdot \dots \cdot q_{m_j}^*)^\delta.$$

Тому α -об'єм всіх циліндрів m_j -го рану, що належать до E_j , не перевищує

$$2(n_{m_j} - 1) \cdot (q_1^* \cdot q_2^* \cdot \dots \cdot q_{m_j}^*)^\delta \cdot |E_j|^{\alpha-\delta}. \quad (1)$$

Покажемо що для $\forall \delta > 0$ послідовність $n_k(q_1^* \cdot q_2^* \cdot \dots \cdot q_k^*)^\delta$ є обмеженою. Оскільки

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln n_k}{\ln(q_1^* \cdot q_2^* \cdot \dots \cdot q_k^*)} = 0,$$

то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{n_k}}{\ln(q_1^* \cdot q_2^* \cdot \dots \cdot q_k^*)} = 0.$$

$\forall \delta > 0, \exists k_0(\delta) : \text{для всіх } k > k_0(\delta) \text{ виконується умова}$

$$0 \leq \frac{\ln \frac{1}{n_k}}{\ln(q_1^* q_2^* \dots q_k^*)} \leq \delta.$$

Отже,

$$\ln \frac{1}{n_k} \geq \delta \ln(q_1^* q_2^* \dots q_k^*),$$

і тому

$$\frac{1}{n_k} \geq (q_1^* q_2^* \dots q_k^*)^\delta, \quad \forall k > k_0(\delta).$$

Тоді

$$n_k(q_1^* q_2^* \dots q_k^*)^\delta \leq 1, \quad \forall k > k_0(\delta).$$

Позначимо $l_k = n_k(q_1^* q_2^* \dots q_k^*)^\delta$, при $k = 1, 2, \dots, k_0$, $L = \max\{l_1, l_2, \dots, l_{k_0}, 1\}$. Тоді $l_k = l_k(\delta) \leq L$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Отже, послідовність $n_k(q_1^* \cdot q_2^* \cdot \dots \cdot q_k^*)^\delta$ є обмеженою, для $\forall \delta > 0$.

Нехай c_j — найлівіша точка, що належить до циліндрів рангу m_j , які містяться в E_j , а d_j — найправіша точка, що належить до циліндрів рангу m_j , які містяться в E_j . Зауважимо що сукупність циліндрів рангу m_j , що містяться в E_j , взагалі кажучи не покривають повністю E_j . Непокритими можуть залишитися $[a_j, c_j]$ і $(d_j, b_j]$.

Розглянемо циліндр рангу $m_j - 1$ який покриває відрізок $[a_j, c_j]$. Позначимо цей циліндр $\Delta_{m_j-1}^* := \Delta_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{m_j-1}}$.

Розглянемо всі циліндри, що належать до $\Delta_{m_j-1}^*$ і для яких c_j буде правою кінцевою точкою. Оскільки, циліндр $\Delta_{m_j-1}^*$ покриває $[a_j, c_j]$, то існує циліндр $\Delta_{s_j}^*$ такий що:

$$\begin{aligned}\Delta_{s_j}^* &:= \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{m_j} \beta_{m_j+1} \dots \beta_{s_j}} \subset [a_j, c_j]; \\ \Delta_{s_j-1}^* &:= \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{m_j} \beta_{m_j+1} \dots \beta_{s_j-1}} \not\subset [a_j, c_j].\end{aligned}$$

Очевидно, що $\frac{|\Delta_{s_j}^*|}{|\Delta_{s_j-1}^*|} = q_{n_{s_j}-1, s_j}$. Тоді

$$|\Delta_{s_j-1}^*| = \frac{1}{q_{n_{s_j}-1, s_j}} |\Delta_{s_j}^*| \leq \frac{1}{q_{n_{s_j}-1, s_j}} (q_1^* q_2^* \dots q_{s_j}^*).$$

Тому

$$|\Delta_{s_j-1}^*|^\alpha \leq \frac{1}{(q_{n_{s_j}-1, s_j})^\alpha} |\Delta_{s_j}^*|^\delta |\Delta_{s_j}^*|^{\alpha-\delta}.$$

Так як $|\Delta_{s_j}^*|^\delta \leq (q_1^* q_2^* \dots q_{s_j}^*)^\delta$, то

$$|\Delta_{s_j-1}^*|^\alpha \leq \frac{1}{(q_{n_{s_j}-1, s_j})^\alpha} |\Delta_{s_j}^*|^\delta |\Delta_{s_j}^*|^{\alpha-\delta} = \frac{1}{(q_{n_{s_j}-1, s_j})^\alpha} (q_1^* q_2^* \dots q_{s_j}^*)^\delta |E_j|^{\alpha-\delta}.$$

Оскільки

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\ln q_{s-1, k}}{\ln(q_1^* q_2^* \dots q_k^*)} = 0,$$

то $\forall \delta > 0, \exists k_1(\delta)$: для всіх $k > k_1(\delta)$ виконується умова

$$0 < \frac{\ln q_{s-1, k}}{\ln(q_1^* q_2^* \dots q_k^*)} < \delta.$$

Отже,

$$\ln q_{s-1, k} > \delta \ln(q_1^* q_2^* \dots q_k^*),$$

і тому

$$q_{s-1, k} > (q_1^* q_2^* \dots q_k^*)^\delta.$$

Тоді

$$\frac{1}{q_{s-1, k}} (q_1^* q_2^* \dots q_k^*)^\delta < 1, \quad \forall k > k_1(\delta).$$

Звідси

$$|\Delta_{s_j-1}^*|^\alpha \leq |E_j|^{\alpha-\delta}. \quad (2)$$

Для точки d_j розглянемо всі циліндри, що належать до Δ_{m_j-1} і для яких точка d_j буде лівою кінцевою точкою. Оскільки, Δ_{m_j-1} покриває $(d_j, b_j]$, то існує такий циліндр, що

$$\begin{aligned}\Delta_{l_j} &:= \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{m_j} \zeta_{m_j+1} \dots \zeta_{l_j}} \subset (d_j, b_j]; \\ \Delta_{l_j-1} &:= \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{m_j} \gamma_{m_j+1} \dots \gamma_{l_j-1}} \not\subset (d_j, b_j],\end{aligned}$$

причому $\gamma_{l_j} = 0$.

Очевидно що $\frac{|\Delta_{l_j}|}{|\Delta_{l_j-1}|} = q_{0,l_j}$. Тоді

$$|\Delta_{l_j-1}| = \frac{1}{q_{0,l_j}} |\Delta_{l_j}| \leq \frac{1}{q_{0,l_j}} (q_1^* q_2^* \dots q_{l_j}^*).$$

Тому

$$|\Delta_{l_j-1}|^\alpha \leq \frac{1}{(q_{0,l_j})^\alpha} |\Delta_{l_j}^*|^\delta |\Delta_{l_j}^*|^{\alpha-\delta}.$$

Так як $|\Delta_{l_j}|^\delta \leq (q_1^* q_2^* \dots q_{l_j}^*)^\delta$, то

$$|\Delta_{l_j-1}|^\alpha \leq \frac{1}{(q_{0,l_j})^\alpha} |\Delta_{l_j}|^\delta |\Delta_{l_j}|^{\alpha-\delta} = \frac{1}{(q_{0,l_j})^\alpha} (q_1^* q_2^* \dots q_{l_j}^*)^\delta |E_j|^{\alpha-\delta}.$$

Оскільки

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\ln q_{0,k}}{\ln(q_1^* q_2^* \dots q_k^*)} = 0,$$

то

$\forall \delta > 0, \exists k_2(\delta) : \text{для всіх } k > k_2(\delta) \text{ виконується умова}$

$$0 < \frac{\ln q_{0,k}}{\ln(q_1^* q_2^* \dots q_k^*)} < \delta.$$

Отже,

$$\ln q_{0,k} > \delta \ln(q_1^* q_2^* \dots q_k^*),$$

і тому

$$q_{0,k} > (q_1^* q_2^* \dots q_k^*)^\delta.$$

Тоді

$$\frac{1}{q_{0,k}} (q_1^* q_2^* \dots q_k^*)^\delta < 1, \quad \forall k > k_2(\delta).$$

Звідси

$$|\Delta_{l_j-1}|^\alpha \leq |E_j|^{\alpha-\delta}. \quad (3)$$

Із (1), (2) і (3) випливає що E_j можна покрити не більше як $2m_j$, $\tilde{Q}$ -циліндрами, α -об'єм яких не перевищує:

$$2(n_{m_j} - 1)|E_j|^{\alpha-\delta} + 2|E_j|^{\alpha-\delta} = 2n_{m_j}|E_j|^{\alpha-\delta}.$$

Оскільки n_{m_j} — обмежена, то α -об'єм таких циліндрів не перевищуватиме

$$2(C_0 - 1)|E_j|^{\alpha-\delta} + 2|E_j|^{\alpha-\delta} = 2C_0|E_j|^{\alpha-\delta}.$$

Тому для довільного ε -покриття множини E відрізками E_j знайдеться відповідне ε -покриття цієї ж множини $\tilde{Q}$ -циліндрами, таке що $\forall \delta > 0, \forall \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \forall \{E_j\}$:

$$\begin{aligned} \sum_i |\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{m_j-1} i}|^\alpha + \sum_h |\Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{m_j-1} h}|^\alpha + |\Delta_{s_j-1}^*|^\alpha + |\Delta_{l_j-1}|^\alpha \\ \leq 2C_0 \sum_j |E_j|^{\alpha-\delta}, \end{aligned}$$

i

$$H_\varepsilon^\alpha(E, \Phi(\widetilde{Q})) \leq \sum_i |\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{m_j-1} i}|^\alpha + \sum_h |\Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{m_j-1} h}|^\alpha + |\Delta_{s_j-1}^*|^\alpha + |\Delta_{l_j-1}|^\alpha,$$

а отже,

$$H_\varepsilon^\alpha(E, \Phi(\widetilde{Q})) \leq 2C_0 \sum_j |E_j|^{\alpha-\delta}.$$

Отримуємо

$$H_\varepsilon^\alpha(E, \Phi(\widetilde{Q})) \leq 2C_0 H_\varepsilon^{\alpha-\delta}(E).$$

Переходячи до границі при $\varepsilon \rightarrow 0$, отримуємо

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_\varepsilon^\alpha(E, \Phi(\widetilde{Q})) \leq 2C_0 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_\varepsilon^{\alpha-\delta}(E),$$

i

$$H^\alpha(E) \leq H^\alpha(E, \Phi(\widetilde{Q})) \leq 2C_0 H^{\alpha-\delta}(E), \quad \forall \alpha > 0, \forall \delta \in (0; \alpha).$$

Отже,

$$\dim_H(E) \leq \dim_H(E, \Phi(\widetilde{Q})) \leq \dim_H(E) + \delta, \quad \forall \delta > 0,$$

тоді

$$\dim_H(E) = \dim_H(E, \Phi(\widetilde{Q})),$$

що і означає довірчість сімейства циліндрів $\Phi(\widetilde{Q})$. □

Зауважимо, вищенаведена теорема не дає відповідь щодо довірчості сім'ї циліндрів $\Phi(\widetilde{Q})$ у випадку коли послідовність $n_k(q_1^* \cdot q_2^* \cdot \dots \cdot q_k^*)^\delta$ не є обмеженою.

Зауваження 1. У доведенні теореми умова $(***)$ використовувалась для доведення того факту, що послідовність $n_k(q_1^* \cdot q_2^* \cdot \dots \cdot q_{m_j}^*)^\delta$ є обмеженою $\forall \delta > 0$. Очевидно, що обмеженість цієї послідовності є еквівалентною умові $(***)$. Природно виникає питання про залежність умови $(***)$ від умов $(*)$ та $(**)$, виконання яких є достатньою умовою для довірчості сім'ї $\widetilde{Q}$ циліндрів для випадку, коли $\widetilde{Q} = Q^*$ (див. [15]).

Наступний приклад показує, що виконання умов $(*)$ та $(**)$ не гарантує виконання умови $(***)$.

Приклад 1. Нехай $n_{m_j} = m_j + 1$ і нехай

$$\begin{aligned} A \subset N \quad & \text{і} \quad l \in A \Leftrightarrow l \neq 2^{2^k}, \quad \forall k \in N; \\ B \subset N \quad & \text{і} \quad l \in B \Leftrightarrow l = 2^{2^k}, \quad \text{для деякого } k \in N. \end{aligned}$$

Тобто $B = \{4, 16, 256, 2^{16}, 2^{32}, \dots\}$, $A = N \setminus B = \{1, 2, 3, 5, 6, \dots\}$.

Означимо матрицю $\widetilde{Q}$ таким чином:

$$\text{а) якщо } l \in A, \text{ то } q_{0l} = 1 - \frac{1}{2^l}, \quad q_{1l} = q_{2l} = \dots = q_{n_l-1,l} = \frac{1}{(n_l - 1) \cdot 2^l};$$

б) якщо $l \in B$, то $q_{0l} = \frac{1}{2}$, $q_{1l} = q_{2l} = \dots = q_{n_l-1,l} = \frac{1}{(n_l-1) \cdot 2}$.

Так як для довільного $\delta > 0$:

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{k_j}}\right)\right)^\delta \geq \left(\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{k_j}}\right)\right)^\delta = a^\delta > 0, \quad \forall \delta > 0,$$

бо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty,$$

то для заданої матриці $\widetilde{Q}$ і для $\forall \delta > 0$:

$$n_{m_j}(q_1^* \cdot q_2^* \cdot \dots \cdot q_{m_j}^*)^\delta \geq a^\delta \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k_j \delta} \cdot (m_j + 1).$$

Оскільки k_j — це кількість членів послідовності 2^{2^k} , які не перевищують m_j , то $2^{2^{k_j}} \leq m_j$.

Тоді

$$k_j \leq \log_2(\log_2 m_j)$$

і

$$k_j = \lfloor \log_2(\log_2 m_j) \rfloor.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^{k_j \delta} \cdot (m_j + 1) &= (2^{-1})^{\lfloor \log_2(\log_2 m_j) \rfloor \delta} \sim \\ &\sim (\log_2 m_j)^{-\delta} \cdot (m_j + 1) = \frac{m_j + 1}{(\log_2 m_j)^\delta} \rightarrow +\infty, \quad m_j \rightarrow \infty, \quad \forall \delta > 0, \end{aligned}$$

що означає необмеженість послідовності $n_{m_j}(q_1^* \cdot q_2^* \cdot \dots \cdot q_{m_j}^*)^\delta$.

Отже, умова $(**)$ не виконується. Покажемо що при цьому умови $(*)$ та $(**)$ виконуються. Так як $\frac{1}{2} \leq q_{0k} < 1$, то

$$\frac{\ln q_{0k}}{\ln(q_1^* \cdot q_2^* \cdot \dots \cdot q_k^*)} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Так як $\frac{1}{(n_k - 1)2^k} \leq q_{n_k-1,k} \leq \frac{1}{(n_k - 1)2}$ і оскільки $n_k = k + 1$ тобто $k = n_k - 1$ справедлива нерівність

$$q_1^* \cdot q_2^* \cdot \dots \cdot q_k^* \leq \prod_{s=1, s \notin A}^k \frac{1}{(n_s - 1) \cdot 2} \leq \frac{1}{2^k k!},$$

бо $(n_1 - 1)(n_2 - 1) \cdot \dots \cdot (n_k - 1) = k!$. Тоді

$$\frac{\ln q_{n_k-1,k}}{\ln(q_1^* \cdot q_2^* \cdot \dots \cdot q_k^*)} = \frac{\ln \frac{1}{q_{n_k-1,k}}}{\ln \frac{1}{(q_1^* \cdot q_2^* \cdot \dots \cdot q_k^*)}} \sim \frac{\ln(2^k \cdot k!)}{\ln(2^k \cdot k!)}.$$

Враховуючи те що $k! \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\frac{k}{e}\right)^k$ отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\ln(2^k \cdot k)}{\ln(2^k \cdot k!)} &= \frac{k \ln 2 + \ln k}{k \ln 2 + \ln k!} \sim \frac{\ln(2^k \cdot k)}{\ln(2^k \cdot k!)} = \frac{k \ln 2 + \ln k}{k \ln 2 + \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + k \ln k - k \ln e} = \\ &= \frac{\frac{\ln 2}{\ln k} + \frac{1}{k}}{\frac{\ln 2}{\ln k} + \frac{\ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}}}{k \ln k} + 1 - \frac{1}{\ln k}} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Наслідок. Якщо послідовність n_k обмежена, то з виконання умов (*) та (**) випливає довірчість сім'ї циліндрів $\Phi(\widetilde{Q})$.

Наведемо приклад матриці $\widetilde{Q}$ для якої не виконується хоча б одна з умов (*), (**), (***), але про яку точно відомо що вона породжує недовірчі локально тонкі сім'ї циліндрів $\Phi(\widetilde{Q})$.

Приклад 2. Нехай

$$\widetilde{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n_1} & \dots & \frac{1}{n_k} & \dots \\ \frac{1}{n_1} & \dots & \frac{1}{n_k} & \dots \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ \frac{1}{n_1} & \dots & \vdots & \dots \\ & & \frac{1}{n_k} & \dots \end{pmatrix},$$

тобто $\widetilde{Q}$ є розкладом Кантора. Тоді умови (*), (**), (***) мають вигляд

$$\frac{\ln \frac{1}{n_k}}{\ln \left(\frac{1}{n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k} \right)} = \frac{\ln n_k}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k)} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Виберемо $n_k = 2^{2^k}$, тоді $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k = 2^{2^1} \cdot 2^{2^2} \cdot \dots \cdot 2^{2^k} = 2^{2^{k+1}-2}$.

$$\frac{\ln n_k}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k)} = \frac{\ln 2^{2^k}}{\ln(2^{2^{k+1}-2})} = \frac{2^{2^k}}{2^{2^{k+1}-2}} = \frac{1}{2 - \frac{2}{2^k}} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad k \rightarrow \infty.$$

Отже, умови (*), (**), (***) порушуються. При цьому $\Phi(\widetilde{Q})$ є недовірчою для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича, бо як відомо з роботи [3], $\Phi(Cant)$ є довірчою тоді і тільки тоді коли

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln n_k}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k)} = 0.$$

Acknowledgment

This work was partly supported by a grant from the Simons Foundation (1290607, Torbin G.) and by the Ministry of Science and Education of Ukraine (projects “Multifractal analysis of probability distributions and its application for modeling of complex dynamical systems” and “Dynamics of complex systems on different time scales”).

Література

- [1] S. Alberverio, Yu. Kondratiev, R. Nikiforov, G. Torbin. 2017. On new fractal phenomena connected with infinite linear IFS. *Mathematische Nachrichten* 290(8–9). P. 1163–1176.
- [2] S. Alberverio, I. Garko, M. Ibragim, G. Torbin. 2017. Non-normal numbers: Full Hausdorff dimensionality vs zero dimensionality. *Bulletin des Sciences Mathematiques* 141(2). P. 1–19.
- [3] S. Alberverio, G. Ivanenko, M. Lebid, G. Torbin. 2020. On the Hausdorff dimension faithfulness and the Cantor series expansion. *Methods of Functional Analysis and Topology* 26(4). P. 298–310.
- [4] S. Alberverio, M. Pratsiovytyi, G. Torbin. 2005. Topological and fractal properties of real numbers which are not normal. *Bulletin des Sciences Mathematiques* 129(8). P. 615–630.
- [5] S. Alberverio, M. Pratsiovytyi, G. Torbin. 2004. Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff–Besicovitch dimension. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 24(1). P. 1–16.
- [6] S. Alberverio, O. Baranovskyi, M. Pratsiovytyi, G. Torbin. 2007. The Ostrogradsky series and related Cantor-like sets. *Acta Arithmetica* 130(3). P. 215–230.
- [7] S. Alberverio, G. Torbin. 2005. Fractal properties of singularly continuous probability distributions with independent Q^* -digits. *Bull. Sci. Math.* 129(4). P. 356–367.
- [8] C. Bandt, S. Graf, M. Zahle. (Eds.) 2000. *Fractal Geometry and stochastics*. Basel, Boston, Berlin, Birkhäuser.
- [9] M. Bernardi, C. Bondioli. 1999. On some dimension problems for self-affine fractals. *Journal for Analysis and its Applications* 18(3). P. 733–751.
- [10] A. Besicovitch. 1952. On existence of subsets of finite measure of sets of infinite measure. *Indag. Math* 14. P. 339–344.
- [11] P. Billingsley. 1961. Hausdorff dimension in probability theory II. *Ill. J. Math.* 5. P. 291–198.
- [12] P. Billingsley. 1965. *Ergodic theory and information*. New York-London-Sydney: John Wiley, Sons, Inc.
- [13] C. Cutler. 1988. A note on equivalent interval covering systems for Hausdorff dimension on $\mathbb{R}$. *Internat. J. Math. and Math. Sci.* 2(4). P. 643–650.
- [14] K. Falconer. 1990. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, Chichester: Wiley.
- [15] M. Ibragim, G. Torbin. 2012. Faithfulness and fractal properties of probability measures with independent Q^* -digits. *Transactions of the National*

- Pedagogical University (Phys.-Math. Sci.)* 13(2). P. 35–46.
- [16] B. Mandelbrot. 1983. *The Fractal geometry of nature*. Freeman and Co, San-Francisco.
 - [17] M. Lupain, G. Torbin. 2014. On new fractal phenomena related to distributions of random variables with independent GLS-symbols. *Transactions of the National Pedagogical University (Phys.-Math. Sci.)* 16(2). P. 25–39.
 - [18] R. Nikiforov, G. Torbin. 2013. Fractal properties of random variables with independent Q_∞ -symbols. *Theory of Probability and Mathematical Statistics* 86. P. 169–182.
 - [19] Y. Peres, G. Torbin. Continued fractions and dimensional gaps, *in preparation*.
 - [20] Y. Pesin. 1997. *Dimension theory in dynamical systems. Contemporary views and applications*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago.
 - [21] М. Pratsiovytyi. 1998. *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів*. Київ : Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 296 с.
 - [22] G. Torbin. 2002. Fractal properties of the distributions of random variables with independent Q^* -symbols. *Transactions of the National Pedagogical University (Phys.-Math. Sci.)* 3. P. 241–252.
 - [23] V. Vasylenko, O. Voronenko, M. Pykhtar, G. Torbin. 2023. Faithfulness of system of Q^* -cylinders for calculation of Hausdorff–Besicovitch dimension. *Interdisciplinary Studies of Complex Systems* 23. P. 70–76.