

FAITHFULNESS OF SYSTEM OF Q^* -CYLINDERS FOR
CALCULATION OF HAUSDORFF–BESICOVITCH DIMENSION

Vladyslav Vasylenko^{1,2}, *Oleksandr Voronenko*^{1,3}, *Mykola Pykhtar*^{1,4},
Grygoriy Torbin^{1,5,6}

ПРО ДОВІРЧИСТЬ СИСТЕМИ Q^* -ЦИЛІНДРІВ ДЛЯ
ОБЧИСЛЕННЯ РОЗМІРНОСТІ ХАУСДОРФА–БЕЗИКОВИЧА

*Владислав Василенко, Олександр Вороненко, Микола Пухтар,
Григорій Торбін*

Abstract. The paper is devoted to the development of methods of proving the faithfulness for the determination of the Hausdorff-Besicovitch dimension of Vitaly coverings of the unit interval. General sufficient conditions for the faithfulness of the family $\Phi(Q^*)$ of cylinders generated by Q^* -expansions for the Hausdorff-Besicovitch dimension calculation of real numbers are proven. We also conjectured that our sufficient conditions are also necessary conditions for the family $\Phi(Q^*)$ of cylinders to be faithful.

Keywords: Hausdorff-Besicovitch dimension, Q^* -expansions of real numbers, faithful Vitaly coverings

2020 Mathematics Subject Classification: Mathematics Subject Classification (2020): 11K55, 26A30, 28A80, 60E10

Анотація. Робота присвячена розвитку методів доведення довірчості для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича локально тонких систем покриттів одиничного відрізка. В роботі доведено загальні достатні умови довірчості для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича системи $\Phi(Q^*)$ циліндричних відрізків, породжених Q^* -розкладами дійсних чисел. Також висунуто гіпотезу про те, що знайдені достатні умови довірчості є одночасно необхідними умовами.

Ключові слова: Розмірність Хаусдорфа-Безиковича, Q^* -розклади дійсних чисел, довірчі локально тонкі системи покриттів

¹ Dragomanov Ukrainian State University, Kyiv, Ukraine

² vasvlad1997@gmail.com

³ ysk.docs@gmail.com

⁴ nppihtar@gmail.com

⁵ g.m.torbin@udu.edu.ua

⁶ Institute of Mathematics of NASU, Kyiv, Ukraine. torbin@imath.kiev.ua

1 Вступ

Розмірність Хаусдорфа–Безиковича є основним інструментом дослідження фрактальних множин. При цьому проблема визначення чи хоча б оцінки розмірності Хаусдорфа–Безиковича множини або міри є однією з основних задач фрактального аналізу, розв’язанню якої присвячено велику кількість дослідницьких статей у провідних математичних журналах світу (див., наприклад, [2–4] та огляди в цих роботах). Тому вдосконалення існуючих та пошук нових методів обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича є актуальним завданням фрактального аналізу. Суть одного з таких методів полягає у зменшенні сімейства допустимих покриттів при обчисленні розмірності до деякого специфічного (бажано — зчисленного) класу покриттів, який є достатнім (довірчим) для правильного обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича. Нагадаємо, що сімейство Φ підмножин з $[0, 1]$ називається локально тонкою системою покриттів одиничного відрізка, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке покриття відрізка $[0, 1]$ підмножинами $E_j \in \Phi$, що $|E_j| < \varepsilon$ і $[0, 1] = \bigcup_j E_j$.

Нехай α — додатне число. Тоді α -мірною мірою Хаусдорфа множини E відносно сімейства Φ називається

$$H^\alpha(E, \Phi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\inf_{|E_j| \leq \varepsilon} \left\{ \sum_j |E_j|^\alpha \right\} \right],$$

де інфімум береться за всіма не більш як зліченими ε -покриттями $\{E_j\}$ множини E множинами $E_j \in \Phi$.

Розмірністю Хаусдорфа–Безиковича множини E відносно сімейства підмножин Φ називається таке невід’ємне число, що

$$\dim_H(E, \Phi) = \inf \{ \alpha : H^\alpha(E, \Phi) = 0 \}.$$

Локально тонка система покриттів Φ називається довірчою системою покриттів на $[0, 1]$, якщо

$$\dim_H(E, \Phi) = \dim_H(E), \forall E \subset [0, 1].$$

Як відомо (див., наприклад, [4, 6, 7] та огляд літератури в цих роботах) прикладами довірчих систем покриттів є системи циліндрів, що породжуються s -адичним представленням дійсних чисел [5]; системи покриттів, які породжуються Q -представленнями [14]; системи покриттів, що породжуються Q^* -представленнями, для яких виконується умова ([4]):

$$\inf_k \{q_{0k}, q_{(n-1)k}\} > 0.$$

Q^* -зображення дійсних чисел, яке було вперше введено в розгляд як інструмент зображення дійсних чисел та зручний інструмент побудови сингулярно неперервних та абсолютно неперервних розподілів ймовірностей з ніде не щільним спектром додатної міри Лебега в роботі [13] та детально досліджено в роботі [11], стало у певному розумінні полігоном перевірки гіпотез та побудови контрприкладів для багатьох проблем, пов’язаних

з теорією сингулярно неперервних ймовірнісних мір ([10, 14]) (застосування теореми Джессена-Вінтнера та побудова її узагальнень, топологометрична класифікація сингулярно неперервних розподілів тощо), метричною та розмірнісною теорією чисел (фрактальні та метричні властивості множин аномальних та суттєво аномальних чисел [1, 12]), з дослідженням проблем довірчості для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича систем циліндричних відрізків, породжених різними системами числення тощо. Тому Q^* -зображення дійсних чисел доцільно використовувати як методологічно цінний педагогічний інструмент при викладанні основ фрактального аналізу та теорії сингулярних мір для студентів математичних спеціальностей університетів. У роботі [9] побудовано приклад такого Q^* -зображення дійсних чисел, для якого відповідна система циліндричних відрізків не є довірчою, що дало перший приклад недовірчої системи циліндрів, породженої розкладами дійсних чисел із фіксованим скінченним алфавітом.

З метою пошуку достатніх умов довірчості для системи Q^* -циліндрів, у серії робіт М. Ібрагіма та Г. Торбіна ([6, 7]) було запропоновано новий підхід до знаходження довірчості систем циліндрів, породжених Q^* -представленнями дійсних чисел. У цій роботі ми удосконалюємо цей підхід та отримуємо загальні достатні умови довірчості систем Q^* -циліндрів, які у певному сенсі є близькими до необхідних умов.

2 Про нові достатні умови довірчості для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича системи циліндрів Q^* -розкладів

Теорема 1. Нехай $Q_n := q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n$, де $q_k := \max_i \{q_{ik}\}$. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n^\alpha$ збігається $\forall \alpha > 0$, то сім'я $\Phi(Q^*)$ циліндрів Q^* -зображення є довірчою для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича на $[0; 1]$.

Доведення. Нехай E — довільна підмножина з $[0; 1]$, α і ε — довільні додатні числа, δ — довільне число з проміжка $(0; \alpha)$. Нехай $\{E_j\}$ — довільне ε -покриття множини E відрізками, $\{E_j\} = [a_j; b_j]$. Для E_j існує циліндричний відрізок

$$\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n_j}}$$

мінімального рангу n_j , який цілком міститься в $[a_j; b_j]$. Оскільки довільний циліндр є об'єднанням s циліндрів наступного рангу, то існує не більше як $(2s - 2)$ циліндри рангу n_j , що належать $[a_j; b_j]$.

Позначимо через M_j об'єднання таких циліндрів. α -об'єм всіх циліндрів, що входять до M_j , не перевищує

$$(2s - 2) \cdot |E_j|^\alpha < 2s \cdot |E_j|^\alpha \quad (1)$$

Нехай

$$c_j := \min\{x : x \in M_j\};$$

$$d_j := \max\{x : x \in M_j\}.$$

Як покрити $[a_j; c_j]$ циліндрами? Нехай $\Delta_{\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_{n_j}\dots\gamma_{n_j+s_j^{(1)}}}$ - циліндр мінімального рангу, що належить $[a_j; c_j]$. Таких циліндрів є не більш як $(s - 1)$. Позначимо через $L_j^{(1)}$ об'єднання таких циліндрів. Їх α -об'єм не перевищує

$$(s - 1) \cdot \max |\Delta_{\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_{n_j}\dots\gamma_{n_j+s_j^{(1)}}-1} i| =$$

(де максимум береться за всіма такими циліндрами, що належать до $L_j^{(1)}$)

$$\begin{aligned} &= (s - 1) \cdot \max |\Delta_{\gamma_1\dots\gamma_{n_j+s_j^{(1)}}-1} i|^\delta \cdot |\Delta_{\gamma_1\dots\gamma_{n_j+s_j^{(1)}}-1} i|^{\alpha-\delta} \\ &\leq (s - 1) \cdot Q_{n_j+s_j^{(1)}}^\delta \cdot |E_j|^{\alpha-\delta} \end{aligned} \quad (2)$$

Нехай $c_j^{(1)} := \min\{x : x \in L_j^{(1)}\}$.

Як покрити $[a_j; c_j^{(1)}]$ циліндрами? Нехай

$$\Delta_{\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_{n_j}\dots\gamma_{n_j+s_j^{(1)}}\dots\gamma_{n_j+s_j^{(1)}+s_j^{(2)}}-1}$$

циліндр мінімального рангу, що міститься в $[a_j; c_j^{(1)}]$. Таких циліндрів є не більш як $(s - 1)$. Позначимо через $L_j^{(2)}$ об'єднання таких циліндрів. Їх α -об'єм не перевищує

$$(s - 1) \cdot \max |\Delta_{\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_{n_j+s_j^{(1)}+s_j^{(2)}}-1} i| =$$

(де максимум береться за всіма такими циліндрами, що належать до $L_j^{(2)}$)

$$\begin{aligned} &= (s - 1) \cdot \max |\Delta_{\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_{n_j+s_j^{(1)}+s_j^{(2)}}-1} i|^\delta \cdot |\Delta_{\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_{n_j+s_j^{(1)}+s_j^{(2)}}-1} i|^{\alpha-\delta} \\ &\leq (s - 1) \cdot Q_{n_j+s_j^{(1)}+s_j^{(2)}}^\delta \cdot |E_j|^{\alpha-\delta}. \end{aligned} \quad (3)$$

Продовжуючи цей процес по індукції, ми або на певному кроці отримаємо ситуацію, коли а) $a_j \equiv c_j^{(k)}$, або ж б) $a_j < c_j^{(k)}, \forall k \in N$.

У випадку б) отримаємо зчисленну кількість циліндрів, які покривають $(a_j; c_j]$. Їх загальний α -об'єм не перевищує

$$\begin{aligned} &(s - 1) \cdot |E_j|^{\alpha-\delta} \cdot (Q_{n_j+s_j^{(1)}}^\delta + Q_{n_j+s_j^{(1)}+s_j^{(2)}}^\delta + \dots + Q_{n_j+s_j^{(1)}+s_j^{(2)}+\dots+s_j^{(k)}}^\delta + \dots) \leq \\ &\leq s \cdot |E_j|^{\alpha-\delta} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} Q_n^\delta\right). \end{aligned}$$

У випадку а) отримаємо скінченну кількість циліндрів, які покривають $[a_j; c_j]$. Їх загальний α -об'єм не перевищує

$$s \cdot |E_j|^{\alpha-\delta} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} Q_n^\delta\right).$$

В обох випадках існує скінченна або зчисленна кількість циліндрів, яка покриває $(a_j; c_j]$ і їх α -об'єм не перевищує

$$s \cdot |E_j|^{\alpha-\delta} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} Q_n^\delta \right).$$

Аналогічна ситуація з $[d_j; b_j]$: існує скінченна або зчисленна кількість циліндрів, які покривають $[d_j; b_j]$ і чий α -об'єм не перевищує

$$s \cdot |E_j|^{\alpha-\delta} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} Q_n^\delta \right).$$

Отже, інтервал $(a_j; b_j)$ можна покрити за допомогою скінченної або зчисленної кількості Q^* -циліндрів, і α -об'єм цього покриття не перевищує

$$2s \cdot |E_j|^\alpha + 2 \cdot s |E_j|^{\alpha-\delta} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} Q_n^\delta \right) \leq 2s \cdot |E_j|^{\alpha-\delta} \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^\delta \right).$$

Точки a_j і b_j , взагалі кажучи, можуть бути непокритими цими циліндрами.

Для заданих $\alpha > 0, \delta > 0, [a_j; b_j]$ можна вибрати циліндри рангу k_j такі, що містять відповідно a_j і b_j , і α -об'єми цих циліндрів менші за $\frac{1}{2}s|E_j|^{\alpha-\delta} \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^\delta \right)$.

Добавивши ці два циліндри до покриття, ми отримаємо ε -покриття відрізка $[a_j; b_j]$ Q^* -циліндрами і α -об'єм цього покриття не перевищує

$$3s \cdot |E_j|^{\alpha-\delta} \cdot (1 + S(\delta)),$$

де $S(\delta) := \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^\delta$.

Отже, для довільного $\varepsilon > 0$, довільного $\alpha > 0$, довільного $\delta \in (0; \alpha)$ та для довільного ε -покриття $\{E_j\}$ відрізками, існує таке ε -покриття множини E Q^* -циліндрами, α -об'єм якого не перевищує

$$3s \cdot \sum_j |E_j|^{\alpha-\delta} \cdot (1 + S(\delta)).$$

Тому

$$H_\varepsilon^\alpha(E, \Phi(Q^*)) \leq 3s \cdot (1 + S(\delta)) \cdot \sum_j |E_j|^{\alpha-\delta}.$$

Оскільки остання нерівність правильна для довільного ε -покриття $\{E_j\}$ множини E відрізками, то

$$H_\varepsilon^\alpha(E, \Phi(Q^*)) \leq 3s \cdot (1 + S(\delta)) \cdot H_\varepsilon^{\alpha-\delta}(E),$$

$$\forall E, \forall \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \forall \delta \in (0; \alpha).$$

Переходячи до границі при $\varepsilon \rightarrow 0$, отримуємо

$$H^\alpha(E, \Phi(Q^*)) \leq 3s \cdot (1 + S(\delta)) \cdot H^{\alpha-\delta}(E),$$

$$\forall E, \forall \alpha > 0, \forall \delta \in (0; \alpha).$$

Отже,

$$\dim_H(E, \Phi(Q^*)) \leq \dim_H E + \delta, \forall \delta > 0.$$

Оскільки остання нерівність має місце для довільного як завгодно малого δ , то

$$\dim_H(E, \Phi(Q^*)) \leq \dim_H E, \forall E.$$

Беручи до уваги, що завжди має місце нерівність

$$\dim_H E \leq \dim_H(E, \Phi), \forall E, \forall \Phi,$$

то отримуємо бажану рівність

$$\dim_H(E, \Phi(Q^*)) = \dim_H(E), \forall E \subset [0; 1]. \quad \square$$

Наслідок 1. Якщо $\sup_{i,k} q_{ik} =: q^* < 1$, то $\Phi(Q^*)$ -довірча.

Гіпотеза. Умова $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n^\delta < +\infty, \forall \delta > 0$ є необхідною для довірчості $\Phi(Q^*)$.

Подяка

Ця робота була частково підтримана Simons Foundation та науково-дослідними проектами «Багаторівневий аналіз сингулярних ймовірнісних мір та його застосування» та «Динаміки складних систем у різних часових шкалах» (МОН України).

Література

- [1] S. Alberverio, I.Garko, M.Ibragim, G. Torbin. 2016. Non-normal numbers: Full Hausdorff dimensionality vs zero dimensionality. *Bulletin des Sciences Mathematiques*, 141, no. 1. P. 1–19.
- [2] S. Alberverio, Yu. Kondratiev, R. Nikiforov, G. Torbin. 2017. On new fractal phenomena connected with infinite linear IFS. *Mathematische Nachrichten*, 290. P. 1163–1176.
- [3] S. Alberverio, G.Ivanenko, M.Lebid, G. Torbin. 2020. On the Hausdorff dimension faithfulness and the Cantor series expansion. *Methods of Functional Analysis and Topology*. 26, no. 4. P. 298–310.
- [4] S. Alberverio, G. Torbin. 2005. Fractal properties of singularly continuous probability distributions with independent Q^* -digits. *Bull. Sci. Math.*, 129, no. 4. P. 356–367.
- [5] P. Billingsley. 1965. *Ergodic theory and information*. New York-London-Sydney: John Wiley & Sons, Inc.
- [6] М. Х. Ібрагім, Г. М. Торбін. 2015. Про ймовірнісний підхід до DP-перетворень та довірчості систем покриттів для обчислення розмірності. *Теорія ймовірностей і математична статистика*, 92. P. 29–40. (English translation in: *Theory of Probability and Mathematical Statistics*. 2016, 92, p. 23–36.)

- [7] M. Ibragim, G. Torbin. 2016. On fractal faithfulness and fine fractal properties of random variables with independent Q^* -digits. *Modern Stochastics: Theory and Applications*, 3, no. 2. P. 119–131.
- [8] R. Nikiforov, G. Torbin. 2013. Fractal properties of random variables with independent Q_∞ -symbols. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 86. P. 169–182.
- [9] Yu. Peres, G. Torbin. Continued fractions and dimensional gaps, *in preparation*.
- [10] Г. М. Торбін. 2005. Мультифрактальний аналіз сингулярно неперевних ймовірнісних мір. *Український математичний журнал*, 57, no. 5. P. 837–857.
- [11] Г. М. Торбін. 1999. Випадкові величини типу Джессена-Вінтнера та їх фрактальні властивості. *Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 — теорія ймовірностей та математична статистика*. — Інститут математики НАН України, Київ.
- [12] Г. М. Торбін. 1998. Частотні характеристики нормальних чисел в різних системах числення. *Фрактальний аналіз та суміжні питання*. — Київ: ІМ НАН України — НПУ ім. М. П. Драгоманова. № 1. С. 53–55.
- [13] Г. М. Торбин, Н. В. Працевитый. 1992. Случайные величины с независимыми Q^* -знаками. *Случайные эволюции: теоретические и прикладные задачи*. — Киев: Ин-т математики АН Украины. С. 95–104.
- [14] А. Ф. Турбин, Н. В. Працевитый. 1992. *Фрактальные множества, функции, распределения*. К.: Наукова думка.