Interdisciplinary Studies of Complex Systems
No. 21 (2022) 59–87

https://doi.org/10.31392/iscs.2022.21.059 УДК 378.147:004.9

Methodological aspects of teaching mathematical modeling in the system of university education

Valentyn Sobchuk[1,2], *Iryna Zamrii*[3], *Oleg Barabash*[4,5], *Andrii Musienko*[3,6], *Nataliia Lukova-Chuiko*[1,7]

Методологічні аспекти навчання математичного моделювання в системі університетської освіти

Валентин Собчук, Ірина Замрій, Олег Барабаш, Андрій Мусієнко, Наталія Лукова-Чуйко

Abstract. The problem of formation of practice- and professionally-oriented skills by means of general subject areas in the conditions of constant modernization of educational standards of higher professional education and realization of the concept of development of mathematical education is investigated in the work. The problem of convergence in the educational process of theoretical and applied mathematics is studied, which, in fact, is solved by means of effective use of ideas and methods of mathematical modeling. There is a cross-cutting content and methodological line of mathematical models, in the implementation of which the greatest potential for increasing the motivation of students to mathematical activities. It is shown that this approach is a carrier of innovation, novelty in the content of mathematical courses and methods of their teaching and practice-oriented orientation. The inseparable connection between the methodology of cognition and the methodology of practical integrity of the study of applied problems of natural sciences, which are studied in various mathematical courses of higher education institutions for the further formation of professional competencies in the course of mathematical modeling.

Keywords: mathematical model, competencies, research competence, research-oriented learning

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine
[2] v.v.sobchuk@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-4002-8206
[3] State University of Telecommunications, Kyiv, Ukraine. irinafraktal@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-5681-1871
[4] National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute named after Igor Sikorsky", Kyiv, Ukraine
[5] bar64@ukr.net, https://orcid.org/0000-0003-1715-0761
[6] mysienkoandrey@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-1849-6716
[7] lukova@ukr.net, https://orcid.org/0000-0003-3224-4061

Анотація. В роботі досліджується проблематика формування практико- і професійно-орієнтованих умінь засобами загальноосвітніх предметних областей в умовах постійної модернізації освітніх стандартів вищої професійної освіти і реалізації концепції розвитку математичної освіти. Вивчається задача зближення в навчальному процесі теоретичної і прикладної математики, яка, власне, вирішується засобами ефективного використання ідей і методів математичного моделювання. Виділяється наскрізна змістовно-методична лінія математичних моделей, в реалізації якої закладається найбільший потенціал для зростання мотивації студентів до математичної діяльності. Показується, що такий підхід є носієм інноваційності, новизни в змісті математичних курсів і методики їх викладання та практико-орієнтованої спрямованості. Розкривається нерозривний зв'язок методології пізнання та методології практичної цільності вивчення прикладних задач природознавства, які вивчаються в різних математичних курсах ЗВО для подальшого формування фахових компетенцій в курсі математичного моделювання.

Ключові слова: математична модель, компетенції, дослідницька компетентність, дослідницько-орієнтоване навчання

Вступ

Постановка проблеми. Математичне моделювання є потужним інструментом розв'язання технічних, інженерних і наукових проблем, що ґрунтуються на використанні математичних моделей. Сучасні результати отримані в науці та техніці були б неможливими без розробки та застосування ефективних засобів математичного моделювання. Нині неможливо ефективно керувати складними процесами без використання адекватних математичних моделей.

Вирішення переважної більшості наукових та інженерно-технічних задач (проектування і оптимізація систем, вивчення механізмів явищ, прогнозування розвитку процесів в часі, оптимальне управління об'єктом тощо) ґрунтується на математичному моделюванні. Математичне моделювання передбачає опис явищ, процесів, систем різної фізичної природи, які є предметом дослідження, мовою математичних співвідношень [1]. Класи математичних моделей визначаються постановкою задач та метою дослідження, а також рівнем знань експериментатора про об'єкт, що моделюється. Відтак, володіння теоретичною базою і інструментами математичного моделювання є невід'ємним атрибутом сучасного дослідника.

Навички математичного моделювання займають важливе місце серед загальних результатів освоєння студентами основних освітніх програм (особистісні характеристики, результати метапредметного характеру), і предметних результатів [2]. Затребуваність таких навичок обумовлена тим, що завдяки стрімкому розвитку обчислювальних методів математичне моделювання стає одним з основних методологічних підходів до дослідження різноманітних реальних процесів, стаючи все більш універсальним. У зв'язку з цим посилилася необхідність модернізації математичної освіти, метою якого є вже не лише набуття студентами певної суми математичних знань, але, в першу чергу, розвиток логічного мислення, освоєння математичного апарату, необхідного для вирішення прикладних і практичних задач, формування вмінь перевести прикладне завдання на математичну мову. У вирішенні таких завдань закладений найбільший потенціал для зростання мотивації студентів до математичної діяльності. Мотив народжується як наслідок усвідомлення дослідниками–початківцями можливостей математичної науки в описі, дослідженні, прогнозуванні характеру процесів, явищ тощо. Ця думка неодноразово висловлювалася багатьма провідними математиками А.Н. Колмогоровим, Б.В. Гнеденком та ін. Наприклад, відомий вчений і педагог Н.Я. Віленкін, кажучи про проблемний метод навчання, рекомендував, щоб постановці проблеми передували певні прикладні задачі. В цьому випадку в студента не формуватиметься хибне уявлення про відірваність математики від практичної діяльності людини.

Кожна практична або прикладна задача, яка розв'язується з використанням математичного апарату, насамперед супроводжується трансляцією її умови на математичну мову з подальшим використанням понять, фактів і методів математичних методів. Отже, процес її розв'язання є нічим іншим, як процесом математичного моделювання.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Математичне моделювання як тема дослідження в галузі математичної освіти почалося з роботи Pollak [3]. В даній роботі розкрито взаємозв'язок між застосуванням математики та процесом навчання починаючи з початкової школи.

У роботі [4] розкривається питання міждисциплінарних проблем різної природи і взаємозв'язку математики, математичного моделювання, прикладної наукової методології, призначеної для дослідження складних проблем з іншими галузями науки, техніки та ін.; з позиції системного підходу подано базові визначення, методологічні і теоретичні основи формалізації й вирішення міждисциплінарних задач, які стосуються різних предметних галузей; та запропоновано методи формалізації системних задач, приведення їх до форми вирішення в реальних умовах, що характеризуються наявністю великої кількості суперечливих цілей, різних видів невизначеностей і ризиків.

Велика кількість досліджень з навчання математичного моделювання проводилося з тих пір, воно розглядалося і як окрема тема дослідження [5]–[7], і як математична освіта, спрямована на організацію занять у школі, що виявляють тісні стосунки між математикою та навколишнім світом [8]–[10], і як окремий курс в університетській освіті [11]–[13].

В роботах [14]–[15] математичні моделі використовувалися для дослідження складної освітньої макросистеми, побудованої на основі системного синергетичного методу, а також для процесів системного накопичення та дисипації знань, в основу якої покладено принцип міждисциплінарного взаємовпливу.

На думку Blum W. викладання моделювання та застосування математики виконує подвійну функцію: з одного боку, знання математики та її застосувань є життєво важливими для реального світу та його прогресу, головним чином для вирішення реальних проблем та розвитку складних проектів; а з іншого боку, реальний світ та спосіб інтеграції математичних знань надзвичайно важливі як засіб для осмислення вивчення математичних понять і, загалом, математики як дисципліни. Підтримуючи і пропагуючи цю ідею в останні роки все більше приділяється увага математичному моделюванню в закладах вищої освіти (ЗВО) з метою формування дослідницьких навичок та навичок моделювання і оцінювання реальних процесів пов'язаних з професійною діяльністю у студентів-економістів [16], студентів-аграріїв [17], студентів-медиків [18] та студентів інших спеціальностей.

З іншого боку приділяється не достатня увага питанню наскрізного взаємозв'язку і узгодженості вивченню математичних дисциплін та дисциплін професійного спрямування з точки зору формування компетенцій моделювання та дослідження реальних процесів і явищ.

Мета дослідження. Сучасний освітній процес характеризується зміною психолого-орієнтованої парадигми на компетентнісну. У цих умовах загострилися проблеми і протиріччя, пов'язані з математичною підготовкою в системі освіти. Серед них — протиріччя між:

- традиційними змістом і методикою викладання курсу математичного моделювання, потребою в його практичній і професійній орієнтованості;
- переважанням в курсі теоретичних положень, їх докладним, обтяженим технічними деталями обґрунтуванням, і необхідністю формування в студентів операційних, практико-орієнтованих умінь;
- зростанням в курсі «питомої ваги» самостійної роботи і недостатнім для цього рівнем мотивації студентів тощо.

Дані обставини засвідчують, що особливої актуальності набуває проблема зближення в освітньому процесі теоретичної і прикладної математики, яке вирішується засобами ефективного використання ідей і методів математичного моделювання [19].

Складовою нашого дослідження є аналіз сучасних підходів (особлива увага приділяється компетентнісному підходу) та методологічних аспектів навчання математичного моделювання, висвітлення принципів і технологій, досвіду підготовки студентів ЗВО до дослідницької діяльності та математичного моделювання. Використовуючи методи та прийоми активізації дослідницької діяльності студентів, обґрунтувати необхідність наскрізної змістовно-методичної лінії вивчення математичних дисциплін, спрямовану на пратикоорієнтованість та підвищення рівня інтелектуального розвитку, а сама математична модель виступає гносеологічним інструментом, універсальним методом пізнання.

Метою даної роботи є розвиток концепції математичного моделювання та інноваційної змістовно-методичної лінії, яка наскрізно проходить через всі курси математичних дисциплін в системі вищої освіти, зокрема і дуальної. При цьому, на нашу думку, мова повинна йти не лише про реалізацію міжпредметних зв'язків, а й про внутрішньопредметні, вбачаючи в моделюванні спосіб «перенесення» знань, умінь і навичок в суміжні дисципліни.

У роботі з точки зору методології пізнання та практичної цільності висвітлюється міжпредметний зв'язок багатьох задач природознавства, який вимагає освоєння математичного інструментарію тієї чи іншої дисципліни математичної дисципліни, що вивчаються в ЗВО для побудови математичних моделей, які адекватно описують відповідну проблему. Використання загально-логічних методів і прийомів дослідження, таких як: компетентнісний підхід (спрямованість освітнього процесу на досягнення інтегральних результатів у навчанні, якими є загальні та професійні компетентності слухачів) та системний підхід (як сукупність загальнонаукових методологічних принципів, в основі яких лежить розгляд об'єктів як систем, дослідження їх як єдиного цілого з узгодженим функціонуванням усіх елементів і частин). Такий підхід дає можливість комплексно дослідити будь-яку сферу людської діяльності та будувати математичні моделі реальних процесів і явищ. Об'єктом нашого розгляду є процес навчання математичного моделювання в системі вищої освіти, а предметом розгляду — формування умінь, навичок, і, в кінцевому рахунку, компетенцій математичного моделювання.

Ми виходимо з припущення про те, що ознайомлення студентів із загальною концепцією математичного моделювання і розв'язання задач на побудову, аналіз та інтерпретацію математичних моделей створить передумови для розвитку мотивації студентів до вивчення математики та сприятиме, досягненню таких результатів освоєння основних освітніх програм:

- освоєння студентами міжпредметних понять і універсальних навчальних інструментів;
- формування знань про математику як частини загальнолюдської культури, універсальною мовою науки, що дозволяє описувати і вивчати реальні процеси і явища;
- формування основ логічного, алгоритмічного і математичного мислення.

Виходячи з мети і гіпотези, сформулюємо наступні завдання цієї роботи:

1) адаптувати понятійний апарат і концептуальні положення теорії математичного моделювання до процесу вивчення математики в системі «старша школа»–«ЗВО»;
2) проаналізувати існуючі підходи до поняття компетенції/компетентності та сформулювати поняття компетенції математичного моделювання;
3) розробити паспорт формування компетенції математичного моделювання;
4) окреслити змістовне наповнення основних компонент компетенції математичного моделювання;

Практична значимість роботи вбачається у наступному. Оскільки центральною ідеєю є положення про необхідність введення в математичних курсах ЗВО основних понять, пов'язаних з математичним моделюванням, то розв'язання задач ми пропонуємо здійснювати саме з точки зору зазначеного положення, тобто в тісному зв'язку з етапами моделювання, схемою представлення моделі, інтерпретацією результатів тощо. Ця теза ілюструється на матеріалі конкретних задач.

1 Методика дослідження

Модель дослідження. Дане дослідження було розроблено як тематичне дослідження з метою розвитку становлення компетенції математичного моделювання як наскрізного процесу освоєння математичних курсів вишу в процесі фахової підготовки студентів. Робота спрямована на зближення в навчальному процесі теоретичної і прикладної математики, що вирішується засобами ефективного використання ідей і методів математичного моделювання. Розвивається ідея виділення в математичних курсах ЗВО наскрізної змістовно-методичного напрямку математичних моделей, в реалізації якого закладається значний потенціал для зростання мотивації студентів при освоєнні математичного інструментарію в розв'язанні прикладних фахових задач. Даний підхід є носієм інноваційності, новизни в змісті математичних курсів вишу та методики їх викладання. Широке впровадження прикладних задач в наскрізних математичних курсах спрямована на формування в студентів компетенції математичного моделювання, яка визначається як здатність актуалізувати і застосовувати математичні знання і вміння при побудові, аналізі та інтерпретації математичних моделей в процесі розв'язання практичних задач. Це в свою чергу забезпечує: спрямованість на досягнення інтегральних показників підготовки майбутнього фахівця; системність набуття основних груп компетентностей; поступове ускладнення, оновлення, збагачення і узагальнення знань; вдосконалення фахових (професійних) компетентностей.

Учасники. Дослідження було проведено за добровільної участі професорського викладацького складу трьох провідних вишів м. Києва, які спеціалізуються на викладанні математичного моделювання бакалаврам інженерних, технічних та економічних спеціальностей. Зацікавлених учасників обирали серед викладачів, які принаймні один раз викладали відповідні математичні курси і які на час збору даних все ще викладали в ЗВО. Обробку результатів і аналіз даних проводили всі автори статті в різних ЗВО.

Інструмент збору даних. Дані дослідження були зібрані від вищезазначених викладачів за допомогою напівструктурованої форми співбесіди, що включала питання про структуру та наповненість курсів, особливості формування компетентностей математичного моделювання на різних рівнях володіння математичного апарату з різним ступенем інтегрованості математичних дисциплін в структуру фахових програм підготовки бакалаврів. Відповідно до мети дослідження, отримано усні та письмові відповіді на запитання співбесіди з ілюстрацією прикладних аспектів викладання математичного моделювання, яким вони надають перевагу.

Важливо зазначити, що з викладачами-учасниками була проведена попередня зустріч, щоб ознайомити їх із змістом дослідження та суттю співбесіди. Їм також повідомили, що їх відповіді допоможуть реалізувати мету дослідження. Співбесіди проводились за визначеним графіком в індивідуальному порядку. Викладачів просили написати свої відповіді у напівструктурованому вигляді та надати відповіді на подальші запитання — якщо такі є.

Аналіз даних. Транскрибовані дані аналізувались описово. У цьому дослідженні використовувався описовий та систематичний аналіз, який є складовою методів описового аналізу. Даний метод передбачає транскрипцію діалогів, систематизацію та оцінку відповідей учасників. Дані були впорядковані, згруповані за тематикою та систематизовані. Використано метод індуктивного аналізу при інтерпретації результатів, заснованих на даних.

2 Результати дослідження

2.1 Понятійний апарат. Приклади моделей

Основними завданнями вивчення дисципліни математичного моделювання в системі університетської освіти є підготовка спеціалістів, які володіють фаховими навичками використання методів системного аналізу у дослідженні господарських, економічних, організаційних та технічних систем за допомогою математичних моделей із застосуванням сучасних інформаційних технологій.

Ознайомлення студентів з понятійно-категорійним апаратом математичного моделювання ми пропонуємо формувати завчасно виходячи з таких міркувань.

На сучасному етапі розвитку науки моделювання є основним інструментом дослідника, стає одним з головних джерел інформації про процеси, що відбуваються в природі та суспільстві, виявлення та обґрунтування наявних закономірностей в цих процесах. Власне з моделюванням ми постійно зустрічаємося в практичній діяльності, часто навіть не усвідомлюючи цього. Зокрема, наприклад,

- розв'язуючи завдання тестів ще в шкільні роки, учень моделює для себе ситуацію реального зовнішнього незалежного оцінювання;
- випробовуючи автомобіль на стенді, експериментатор моделює ситуацію руху автомобіля в різних режимах та в різноманітних дорожніх умовах;
- літаюча авіамодель з центру наукової творчості в інших масштабах і в спрощеному вигляді моделює політ повітряного судна;
- географічна карта є моделлю реальної місцевості;
- діаграма на екрані монітора є моделлю зміни курсу валюти за певний часовий інтервал;
- електрокардіограма моделює роботу серця у вигляді зображення ламаної кривої в системі координат;
- обчислення (за певними правилами) ймовірності події є моделюванням міри об'єктивної можливості настання даної події в розумовому експерименті;
- кількісні характеристики реальної вибірки є (з певними застереженнями) моделями тих самих характеристик генеральної сукупності об'єктів, які досліджуються;
- відомі формули прямої пропорційної залежності (закон рівномірного руху $S = vt$, другий закон Ньютона, записаний у вигляді $F = ma$, закон Ейнштейна $E = mc^2$ тощо) є «символьними образами» реальних залежностей.

Аналізуючи дані приклади, помічаємо два напрямки, які моделюються. Перші п'ять прикладів ілюструють ситуації, в яких маємо реальне відтворення реальних процесів з тими самими (аналогічними) учасниками, але за інших умов, на іншому інтервалі часу, в інших масштабах тощо. В решті прикладах спостерігаємо інший, відмінний від реальних обставин, спосіб фіксації ситуації, використання іншої «мови» тощо. Такі приклади слугують пропедевтичним матеріалом, що передують поняттям ідеальних, й, зокрема, математичних моделей (схеми, карти, креслення, графіки, символи, мови програмування тощо).

2.2 Різні підходи до поняття моделі

Загалом поняття «математична модель», строго кажучи, є первинним, неозначуваним поняттям. Воно ґрунтується на інтуїтивному розумінні об'єкту дослідження, вводиться його опис через інші поняття, також раніше не означені (первинні).

Наведемо найбільш поширені в літературі означення.

Означення 1. *Моделювання є заміщення деякого об'єкта* A *іншим об'єктом*B. *Об'єкт, який заміщається* A, *називається оригіналом або об'єктом моделювання, а об'єкт, який його заміщує* B *— моделлю». Іншими словами, модель — це об'єкт-замінник об'єкта-оригіналу, що забезпечує можливість вивчення певних властивостей оригіналу.*

Означення 2. *Модель є спеціальним чином спрощена схема деякої частини реального життя, за допомогою якої ми сподіваємося отримати рекомендації до вирішення реальних проблем.*

Означення 3. *Об'єкт* M *є моделлю об'єкта* A *відносно деякої системи характеристик* S, *якщо* M *імітує* A *за цими характеристиками.*

Означення 4. *Модель є штучно створеним об'єктом, який, будучи подібним до об'єкта (явища), що досліджується, відображає і відтворює (у вигляді знакових форм, формул, схем тощо) в більш спрощеному (грубому) вигляді структуру, властивості, взаємозв'язки і відносини між елементами даного об'єкта (явища).*

Означення 5. *Метою моделювання є отримання, обробка, представлення та використання інформації про об'єкти, які взаємодіють між собою і зовнішнім середовищем; модель тут виступає як засіб пізнання властивостей і закономірності поведінки об'єкта. Модель є ніби проекцію об'єктивної реальності під певним кутом зору.*

Спільним для цих визначень є твердження про те, що моделювання є заміщенням одного об'єкта (оригіналу) іншим, який і називатиметься моделлю.

У даній роботі ми будемо дотримуватися концепції О.А. Ляпунова, згідно з якою моделювання є опосередкованим практичним або теоретичним дослідженням об'єкта, що вивчає не сам об'єкт, а деяку допоміжну штучну або природну систему (модель):

- яка перебуває в певній об'єктивній відповідності до об'єкта, що досліджується;
- здатну заміщувати його в певних відношеннях;
- при дослідженні якої, в кінцевому рахунку, дає інформацію про сам об'єкт, що моделюється.

2.3 Математична модель: характеристики та етапи моделювання

З поняттям моделі та цілями моделювання студенти на певному рівні познайомилися ще при вивченні курсу математики загальноосвітньої школи, при цьому рівень строгості викладу мав відповідати їх віковій групі [20]. Математична модель *в першому наближенні* має асоціюватися з деяким незвичайним образом реального об'єкта або процесу, так що моделювання є заглиблення у фантастичне середовище, де живуть символи, формули, графіки, геометричні фігури тощо, в які дивним способом перетворилися предмети, зв'язки, взаємини, які існують в реальному світі [21]. При цьому завдання молодого дослідника — виконати будь-які дії та «розгадати», що криється за фінальною формулою, тим чи іншим результатом. Тобто відтворити ланцюжок справжніх подій і фактів. На більш строгому рівні йдеться про запис властивостей об'єкта, що досліджується, процесу або явища на формальній мові з метою отримання нового знання (виявлення нових властивостей) шляхом застосування формальних (математичних) методів. Під математичним моделюванням розуміється процес встановлення відповідності даному реальному об'єкту деякого математичного об'єкта, званого математичною моделлю; дослідження цієї моделі, дозволяє отримувати характеристики розглянутого реального об'єкта.

Будемо розглядати математичну модель як наближене представлення реальних об'єктів, процесів або систем, виражену в математичних термінах, що зберігає суттєві риси оригіналу; при цьому математичні моделі в кількісній формі, за допомогою логіко-математичних конструкцій, описують основні властивості об'єкта, процесу або системи, його параметри, внутрішні і зовнішні зв'язки [22]. Зокрема, при моделюванні фізичного процесу йому співставляється система математичних співвідношень, розв'язання якої дозволяє отримати відповідь на запитання про поведінку об'єкта без створення власне фізичної моделі.

Згідно з концепцією О.А. Ляпунова, процес математичного моделювання повинен складатися з чотирьох основних етапів.

1) Насамперед будується так звана *змістовна модель* в термінах вихідної предметної області (іноді її також називають *концептуальною моделлю*).

   Концептуальна модель містить вихідну інформацію для аналітика, що виконує формалізацію задачі і використовує для цього певну методологію і технологію.

   При побудові змістовної моделі формулюються так звані постулати моделі (напр., гіпотеза про лінійний характер залежності, що досліджується), тобто відбувається перехід до спрощеного, схематичного опису об'єкта.

2) Наступний етап — трансляція змістовної моделі на формальну математичну мову, тобто перехід до власне математичної моделі.

3) Третій етап є, власне, дослідженням математичної моделі, тобто розв'язанням отриманої математичної задачі.

4) Останнім є етап *інтерпретації* (тлумачення) результату дослідження математичної моделі, наслідком чого буде отримання нової для дослідника інформації про властивості реального об'єкта (для чого, власне, і був потрібен весь процес моделювання).

Перші два «перед математичних» етапи є найважливішими з точки зору створення моделі, яка є адекватною вихідному процесу (явищу). Згідно з О.А. Ляпуновим, тут є свої кроки (етапи)

Етап 1. Безпосередньо є спостереженням, збором, колекціонуванням матеріалів.

Етап 2. Систематизація, інвентаризація, індексування, пошук системи.

Етап 3. Висунення гіпотези, її перевірка, проведення експерименту.

Етап 4. Побудова теорії або відповідної феноменологічної моделі явища, яке досліджується (модель в першому наближенні; модель в статусі тимчасового розв'язку, який має бути уточненим; ситуація типу «поводимося так, як якщо б ...»).

Етап 5. Врешті, найвища точка процесу — математичний опис об'єкта, явища, системи.

Найбільш часто тут виникають рівняння різного характеру, нерівності, системи рівнянь або (і) нерівностей, завдання максимізації (мінімізації), оптимізації тощо.

Врешті, четвертий етап — це етап повернення до вихідної предметної області. Саме на цьому етапі отримуємо необхідну інформацію про вихідний процес (явище), яку не могли отримати іншими засобами. Зокрема, якщо мова йде про процес, то виникає можливість

- визначити стан процесу в певні моменти часу, проміжні між тими, в які цей стан вже був відомим;
- прогнозувати стан процесу за межами даного тимчасового інтервалу.

Перша можливість називається *інтерполяцією*, друга — *екстраполяцією*.

Підсумовуючи вищесказане, зауважимо, що ціль математичного моделювання вбачаємо у створенні і реалізації математичного апарату, який дозволяє апріорно виявити зв'язки між тими чи іншими процесами, явищами, факторами, і передбачити кінцевий результат їх дії. Математична модель в міру накопичення фактів переростає в математичну теорію, яка

Рис. 1

сама починає слугувати джерелом інформації. На рис. 1 представлено типовий процес математичного моделювання.

2.4 Схема представлення моделі

Студентів необхідно ознайомити з загальною схемою представлення моделі вигляду: $X > V > Y$. Тут X — вектор вхідних змінних, Y— вектор вихідних змінних (результати моделі); V— так званий оператор моделі, що забезпечує перетворення інформації (X перетворюється в Y) у відповідність із задачею, що розв'язується на моделі. Є такі три варіанти згаданих задач:

1) пряма задача: відомі X і V, необхідно знайти Y;
2) обернена задача 1: відомі Y і V, необхідно знайти X;
3) обернена задача 2: відомі X і Y, необхідно знайти V.

В останній задачі можливі випадки «*чорного ящика*» — оператор моделі повністю невідомий, і «*сірого ящика*» — при відомій структурі оператора невідомі значення параметрів.

Так, наприклад, в задачах, що відносяться до моделювання фізичних процесів [23], в якості вектора вхідних змінних X зазвичай вибирається набір фізичних характеристик об'єктів, які відображають, наприклад, механічні коливання (струни, стрижня), сукупність теплофізичних характеристик матеріалів, в яких відбувається теплообмін; в задачах економіки вектор X визначається набором вихідних даних, що мають бути проаналізовані (обсяг продукції, що випускається, ціни, показники попиту тощо) і т.д. В основі побудови оператора моделі лежить деякий фізичний закон, закономірності ринку тощо, результат, який отримуємо (число або набір чисел, функція або сукупність функцій, функціональний ряд і ін.) та породжує компоненти вектора Y вихідних змінних.

Тут слід підкреслити, що пошук оператора моделі в багатьох випадках є безпосередньою складовою частиною процесу моделювання.

2.5 Поняття системи. Системний підхід

У загальних рисах в студентів має бути сформоване розуміння математичного моделювання систем і системного підходу [24]. Принцип системності — це філософський принцип, який виконує як світоглядні, так і методологічні функції. В залежності від напрямку фахової освіти в студентів різних спеціальностей може з різної глибиною формуватися це поняття.

Система — в «першому наближенні» — є сукупність взаємодіючих, взаємопов'язаних елементів

Розширення поняття може бути наступним: система розуміється як загальнонаукова категорія для означення явищ природного або штучного світу, що мають внутрішню цілісність, завершену структуру та функціональне призначення.

Подальше розширення і уточнення: системою називають сукупність елементів, взаємопов'язаних між собою таким способом, що виникає певна цілісність, єдність; зазначена цілісність володіє новими інтегративними властивостями, відсутніми у кожного з елементів (*емерджентні* властивості).

Інтеграція розглядається як процес і результат створення нерозривно зв'язаного, єдиного, цілісного. Відповідно до концепції В. А. Енгельгардта, слід говорити про наступні три стадії інтеграції:

1) виникнення системи зв'язків між частинами;
2) втрата (можливо неповна) частинами деяких своїх початкових ідентифікаційних якостей при входженні до складу цілого;
3) поява у цілісності, які формується нових властивостей, обумовлених як властивостями частин, так і виникненням нових систем міжчастинних зв'язків.

Наявність емерджентних властивостей іменується також *синергією.* Студент повинен розуміти, що саме синергія відрізняє систему від простого поєднання (синтезу) деяких елементів. В синергії проявляється сумуючий ефект взаємодії декількох факторів, що характеризується тим, що їх дія істотно перевершує ефект кожного окремого компонента у вигляді їх простої суми.

Найбільш наочно синергія проявляється в життєдіяльності живих організмів, яка сама можлива лише як результат взаємодії процесів і явищ, що протікають в організмі. Прикладом синергії у фізиці може слугувати результат з'єднання двох і більше частин радіоактивного матеріалу, що, з перевищенням критичної маси, породжує виділення енергії в кількості, яка перевищує сумарне випромінювання енергії окремих частин. У суспільному житті знання та зусилля соціуму перевершує сумарні знання і зусилля індивідів. В економіці ефектом злиття компаній може бути отримання прибутку, який перевершує сумарний прибуток, що був до їх злиття.

Зрештою, студент повинен мати базове розуміння системного підходу: даний підхід є напрямом методології наукового пізнання, в основі якого лежить розгляд об'єкта як системи. Математичне моделювання є найважливішим компонентом даної методології, оскільки побудова математичної моделі якраз й покликана (в математичній же формі) відобразити найбільш важливі, істотні зв'язки між елементами систем, що моделюються. Вдало побудована і досліджена модель в процесі її інтерпретації дозволяє виявити в числі властивостей системи також наявність синергії.

2.6 Ієрархія моделей. Властивість універсальності

Розв'язання практичних або прикладних задач часто супроводжується певною ідеалізацією реального об'єкта або ситуації, нехтуванням малозначущими факторами. Студент повинен розуміти, що при цьому необхідно підтримувати розумний баланс між адекватністю моделі і її простотою. Адекватність є умовою відтворення моделі з достатньою повнотою і точністю всіх властивостей системи, істотних для цілей даного дослідження; складність моделі не повинна перевищувати певної межі, що визначається можливостями математичного апарату, яка є в розпорядженні дослідника. На практиці часто дослідник будує послідовність моделей, які утворюються одна з одної шляхом послідовної відмови від припущень, що ідеалізують систему, яка досліджується. Таким чином, вибудовується ієрархічний ланцюжок математичних моделей, що уточнюють і узагальнюють одна одну. Зрозуміло, що при цьому втрачається простота і зростає міра адекватності моделей.

Студенти вищих навчальних закладів вивчають ієрархічні ланцюжки моделей багатьох об'єктів і процесів, що відносяться до їх майбутньої професійної діяльності. Наприклад, вивчення процесу тепломасопереносу. У найпростішому випадку розглядається процес поширення тепла в стрижні при відсутності джерел і поглиначів тепла, і з підтримкою нульової температури на його кінцях. При цьому розв'язується однорідне рівняння в частинних похідних з однорідними крайовими умовами. Ускладнення моделі відбувається, коли температура на кінцях стрижня може змінюватися з плином часу. Зрештою, відмова від припущення «вільного» теплообміну (тобто присутність джерел або поглиначів тепла) призводить до так званої неоднорідної (істотно складнішої) крайової задачі.

При досить ґрунтовно розробленому математичному апараті стає можливим інший підхід до вивчення моделей: «від загального до конкретного». А саме, дослідник розглядає і розв'язує задачу в загальному вигляді. Потім, спираючись на відповідну «загальну» модель, послідовно розглядаючи окремі випадки, він вибудовує ланцюжок більш простих моделей. Даний підхід дозволяє, встановивши загальні властивості системи, конкретизувати і доповнити їх в частинних випадках.

Властивість універсальності математичних моделей ілюструється у випадках, коли з'являється можливість застосування однієї і тієї ж моделі до об'єктів (систем) принципово різної природи, що описуються різним фундаментальними законами. Універсальність математичних моделей пояснюється, з одного боку, як єдністю прояву фізичних властивостей навколишнього світу, так і абстрактністю математичних теорій, їх абстрагованістю від об'єкта дослідження з другого боку. Математика — це мистецтво давати різним об'єктам одне ім'я.

Прикладом найпростішої універсальної математичної моделі є функціональна залежність $y = kx$. При відповідному «наповненні» дане рівняння може описувати абсолютно різні закономірності (закон рівномірного прямолінійного руху при сталій швидкості, розмір податку, що сплачується при сталому відсотку відрахування тощо).

Іншим прикладом є лінійне диференціальне рівняння другого порядку $y'' = -2x$ зі постійним коефіцієнтом -2, яке описує процес (процесну систему) вільних механічних коливань і електромагнітних коливань. В наведених та інших прикладах універсальних математичних моделей одним і тим самим символам слід дати відповідну заданій системі інтерпретацію. Таким чином, в універсальності математичних моделей проявляється інтегруюча роль математичної науки та її методів [11].

2.7 Математичне моделювання при розв'язуванні задач

Розглянемо, як реалізується чотирьохетапний процес математичного моделювання на практичних заняттях та в самостійній роботі студентів.

Трансформація змістовної моделі в модель математичну. Як правило, в задачах, які розв'язуються на практичних заняттях та пропонуються до самостійного розв'язання змістовна модель вже представлена в умові задачі. Залишається тільки її проаналізувати і формалізувати.

На етапі трансформації змістовної моделі в модель математичну виділяємо два можливих рівня складності задач, які розв'язуються. Перший рівень відповідає вже даній знаковій моделі, і тоді залишається завершити перехід до задачі математичної: уточнити постановку, виявити додаткові умови (обмеження на параметри, початкові або крайові умови тощо). Значно більшою мірою інтеграція знань проявляє себе у випадку другого рівня складності, коли сама знакова модель має бути ще побудована, на основі, наприклад, вербального опису процесу.

Особливості деяких моделей:

1) Моделювання ситуацій аналітично заданими функціями, рівняннями та їх системами. Такими є, наприклад, ситуації, які описуються задачами на складання рівнянь. Тут відбувається перехід від вербальної моделі до математичної, при цьому побудова математичної моделі є, по суті, побудова її оператора на основі залежностей (законів), представлених в умові задачі. Так, наприклад, рівняння виду $f(x) = b$ або система рівнянь виду $v(x, y) = p$, $u(x, y) = q$ може бути витлумачена як інформація про вихідних значеннях (b і (p, q), відповідно) оператора, представленого функціями f, v і u. Використовуючи цю інформацію, необхідно визначити «вхідні» значення x і y.
2) Інтерполяція і екстраполяція дозволяють відшукувати аналітичні залежності, близькі до функцій, які описують реальні закономірності [25]–[27]. Так, наприклад, при моделюванні станів змінних в часі систем на заданому часовому інтервалі $[1, 2]$ в деякі фіксовані моменти $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n$ спостерігаються значення функції $f(t_1),\ f(t_2),\ \ldots,\ f(t_n)$. Потрібно визначити значення f в інші моменти. Якщо з якихось міркувань відомий вигляд функції $f(t; a_1, \ \ldots\ , a_m)$, де $a_1, \ \ldots\ , a_m$ — невідомі параметри, то ці параметри можуть бути визначені з умови співпадання значень функції f в точках t_k з даними спостережень. Відповідний спосіб апроксимації функції й знаходження «проміжних» значень і є інтерполяцією. Зрозуміло, що для обчислення параметрів функції необхідна певна кількість спостережень (вимірювань) в залежності від виду шуканої функції. Зокрема, для визначення коефіцієнтів многочлена n-го степеня необхідно $n + 1$ спостережень.

   Процес апроксимації функції і обчислення її значень за межами інтервалу $[1, 2]$ спостереження є екстраполяцією. У більш широкому розумінні, всяке наукове бачення, породжене математичною моделлю, є екстраполяція (з ситуацій, які спостерігаються на ситуації, що не спостерігалися, з виміряних величин на невиміряні і т.і.). Розширення поняття екстраполяції на загальний випадок існування і перспектив розвитку системи в майбутньому називається *прогнозуванням.*

   Задачі інтерполяції та екстраполяції пов'язані із оберненою задачею 2 моделювання, тобто з пошуком оператора V моделі. Власне, випадок відомого вигляду шуканої функції (наприклад, многочлена) відноситься до ситуації «сірого ящика».
3) «Внутрішньоматематичне» моделювання. Прикладами можуть слугувати «алгебраїчні» способи розв'язання геометричних задач. Зокрема, виходячи з теорем і формул геометрії, геометрична задача трансформується в рівняння відносно шуканої величини або систему рівнянь щодо величин, серед яких присутні й шукані.
4) Особливим випадком моделювання є математичне моделювання стохастичних процесів та дискретних систем.

Приклади побудови математичних моделей. Розглянемо низку прикладів побудови математичних моделей.

Приклад 1. Задача інтерполяції і екстраполяції. На початку місяця електролічильник показував 10 200 (кВт.), А 20-го числа 12 000 (кВт.). Вважаючи зростання спожитої електроенергії рівномірним, визначити показання лічильника 7-го числа. Яким має бути показання лічильника в кінці місяця (25-го числа), якщо споживання електроенергії буде залишатися рівномірним?

Тут маємо вербальне представлення ситуації. Для побудови математичної моделі (знаходження оператора моделі) слід знати, що процеси, які рівномірно протікають описуються лінійними функціями. Відтак, шукана залежність має вигляд $y = kt + b$ («сірий ящик»). Значення $t = 0$ і $t = 7$ можна вважати «вхідними», а $y = 10200$ та $y = 12000$ — «вихідними». Параметри k і b шуканої лінійної залежності визначаються тепер як розв'язок відповідної системи рівнянь. Оператором є залежність вигляду $y = 90t + 10200$. Тепер можливе знаходження спожитої електроенергії в будь-які проміжні дні і дні після 20-го числа цього місяця (одержання цієї інформації можна віднести до етапу інтерпретації моделі). Зокрема, покази лічильника 7-го числа становитимуть 10 830 кВт, 25-го числа, відповідно, 12 450 кВт.

Приклад 2. У боковій стінці високої циліндричної цистерни біля самого дна закріплений кран. Після його відкриття вода починає витікати з цистерни, при цьому висота стовпа води в ній, виражена в метрах, змінюється за законом $H(t) = at^2 + bt + h_0$, де $h_0 = 6,25$ м — початковий рівень води, $a = \dfrac{1}{6000}$ м/с^2, та $b = -\dfrac{1}{120}$ м/с — сталі, t — час у секундах, що сплинув з моменту відкриття крана. Протягом якого часу вода витікатиме з цистерни? (Відповідь приведіть в хвилинах).

Дану ситуацію слід віднести до першого рівня складності моделювання: знакова модель вже представлена в умові задачі, потрібно лише уточнення моделі, тобто зведення задачі до пошуку проміжку розв'язку нерівності $H(t) \geq 0$.

Приклад 3. У випадку того ж фізичного процесу розглянемо задачу моделювання другого рівня складності. З циліндричного резервуара (площа основи якого дорівнює S, а висота дорівнює H), заповненого рідиною, через отвір площею s в його дні починає витікати рідина зі швидкістю, пропорційною $\sqrt{h}$, де h — висота рідини над отвором; коефіцієнт пропорційності k відомий. Через скільки часу вся рідина витече з резервуара?

На першому етапі розв'язання потрібно побудувати знакову модель (формалізація задачі), застосовуючи такі міркування: об'єм рідини V, яка витекла за проміжок часу t, дорівнює добутку $-Sh$, де h — зміна висоти h рідини над отвором; очевидно, що висота рідини зменшується, так що $h < 0$. З іншого боку, цей же обсяг дорівнює sl, де l — висота циліндричного стовпа води, що вилилася через отвір площею s, при цьому l (шлях, пройдений рідиною) наближено дорівнює vt, оскільки витік рідини за малі проміжки часу t можна вважати практично рівномірним. Порівнюючи отримані двома способами значення виразу для об'єму V рідини, що витекла, отримаємо

$$-S\Delta h \approx sv\Delta t$$

або, згідно з умовою пропорційності швидкості витікання рідини величині $\sqrt{h}$

$$-S\Delta h \approx k\sqrt{h}s\Delta t.$$

Остання рівність стає більш точною при прагненні до нуля приросту Δt. Відтак дане співвідношення можна переписати у вигляд рівності відповідних диференціалів (взятих з постійними коефіцієнтами)

$$-S \cdot dh = k\sqrt{h}s \cdot dt$$

чи

$$-S\frac{dh}{\sqrt{h}} = ks \cdot dt$$

Розв'язуючи отримане диференціальне рівняння (етап дослідження моделі) та враховуючи, що в початковий момент резервуар був заповнений (тобто $h(0) = H$), отримуємо

$$-2S\sqrt{h} = kst - 2S\sqrt{H}$$

Відтак тепер можлива інтерпретація моделі. Резервуар спустошиться в той момент, коли $h = 0$. В цьому випадку отримуємо

$$t = \frac{2S\sqrt{H}}{ks}.$$

Даний результат і є відповіддю задачі.

Велика кількість прикладів математичних моделей і міждисциплінарних взаємозв'язків наведено у роботі [11].

2.8 Компетенція математичного моделювання

Вище в роботі вже характеризувались інтегральна, загальна та фахова компетентності, які формуються в процесі вивчення математичного моделювання. Розглянемо цей аспект дещо детальніше.

2.8.1 Компетенції: загальні поняття

Поняття компетенції/компетентності в сучасній педагогічній науці не усталене і перебуває на етапі активного становлення. Відтак розглянемо декілька підходів. В загальному випадку у літературі компетенція визначається як

- здатність і готовність особистості до тієї чи іншої діяльності;
- здатність (вміння) мобілізувати в даній ситуації отримані знання та досвід;
- здатність до здійснення реальної життєвої дії;
- можливість ефективно діяти за межами штатних (навчальних) ситуацій;
- інструмент, за допомогою якого можна здійснювати різні дії, виявитися підготовленим до нових ситуацій.

Загальним для зазначених та інших визначень вбачається розуміння компетенції як

– здатність особистості впоратися з самими різноманітними задачами;
– володіння знаннями і досвідом, що дозволяють бути успішними у своїй діяльності;
– вміння здійснювати вибір, виходячи з адекватної оцінки своїх можливостей в конкретній ситуації, актуалізувати і застосовувати в цій ситуації наявні знання і досвід.

Безумовно, аналіз загальних моментів і принципових відмінностей в наведених (та інших) підходах до розуміння компетенції викликає значний теоретичний інтерес. З практичної ж точки зору вкрай важливо зосередитися на прикладному розумінні компетенції як здатності (можливості) встановлювати зв'язок між знанням, умінням, досвідом (ЗУН) і ситуацією, сформувати процедуру вирішення проблеми.

Компетентнісний підхід набув особливого значення в зв'язку з активним розвитком Болонського процесу в системах європейської освіти. Практична реалізація компетентнісного підходу розпочалася в країнах Західної Європи і Сполучених Штатах Америці (competence-based education — CBE) з кінця 60-х років минулого століття — періоду найбільш активного реформування систем освіти.

Тоді ж виникла одна з точок зору про відмінності між поняттями «компетенція» і «компетентність». При цьому компетентність відіграє роль інтелектуально і особистісно обумовленого досвіду соціально-професійної життєдіяльності людини, що базується на знаннях. На початках в наповнені терміну компетентність переважав прагматичний аспект: «основні характеристики людей», які «причинно пов'язані з ефективним виконанням роботи», і «проявляються в різних ситуаціях, протягом тривалого періоду часу» і які можуть бути виміряні або підраховані з метою диференціювати «відмінних» і «посередніх», або ефективних і неефективних виконавців; основний акцент робиться на здатності демонструвати роботу, яка чітко відповідає стандартам.

Стрімкий розвиток наукової думки, процеси модернізації громадського суспільства з одночасним величезним запитом на інформатизацію всіх сфер людської діяльності призвів й до трансформації сучасного розуміння компетентнісного підходу.

Відтак компетентнісний підхід нині має яскраво виражений рефлексивний аспект, виражений в осмисленні своїх власних дій і їх законів. Зокрема, в процесі навчання, де й формуються компетенції, компетентнісний підхід має запустити механізми самоактуалізації навчання, самовизначення учня, освоєння свого фізичного, інтелектуального і духовного розвитку. З введенням компетентнісного підходу «освіту зробило крок в сторону розуміння того, що основні зміни повинні відбуватися не поза, а всередині учня». Сучасний фахівець не здатний до саморозвитку, постійної роботи над собою швидко втрачає конкурентоздатність на ринках праці.

2.8.2 Освітні компетенції

Пов'язуючи процес формування компетенцій з освітнім процесом, розглядають поняття *освітньої компетенції*, визначаючи її як «відчужену, наперед задану вимогу до освітньої підготовки студентів» (відповідно до діючих стандартів освітнього рівня). «Освітні компетенції ... моделюють діяльність студента для його повноцінного життя в майбутньому». Освітня компетенція передбачає засвоєння не відокремлених один від одного знань та умінь, а оволодіння комплексною процедурою, в якій для кожного виділеного напрямку наявна відповідна сукупність освітніх компонентів, які мають особистісно-дієвий характер.

Саме визначення освітніх компетенцій передбачає, що вони базуються на знаннях-уміннях-навичках, однак ніяка компетенція не зводиться лише до цієї тріаді: її можна розглядати як певну сферу відносин між знаннями, вміннями, навичками, що формується і її дією в соціальній практиці. Компетенція передбачає одночасну мобілізацію знань, умінь і способів поведінки в умовах конкретної діяльності.

В результаті формування освітньої компетенції студент набуває здатності «переносити знання», розв'язувати нові для себе задачі, освоювати нові предметні області, нові види діяльності тощо. Відтак, як наслідок бачимо формування властивостей емерджентності, що дозволяє розглядати компетенцію як систему. При цьому будь-яка сформована освітня компетенція є сукупністю компонент:

– ціннісно-смислові орієнтації (компоненти внутрішнього світу особистості, які є індивідуальною трансляцією суспільних цінностей, переконання студента в прагненні досягнення тих чи інших цілей, включення їх в особистісний смисловий контекст);
– кругозір (володіння інформацією про предмет, процес, явище, його характерні ознаки, вміння привести відповідний приклад та контрприклад);
– знання (в загальному випадку — результат пізнання, відображений у свідомості людини у вигляді сукупності понять, теоретичних конструкцій і бачення, перевірених практикою і пересвідчених логікою; в навчальному процесі — зрозумілий і засвоєний зміст предмета, процесу, явища, здатність дати відповідні даному знанню визначення через структуру і зв'язок з іншими поняттями);
– вміння (оволодіння новим способом дії в процесі розв'язання певного класу задач, засноване на певному знанні);
– навички (доведені до автоматизму вміння розв'язувати певні типи задач, здатність до дії, яка досягла найвищого рівня сформованості і здійснюється без усвідомлення проміжних кроків);
– досвід діяльності (сукупність практичних знань, умінь, навичок, набутих під час повсякденної діяльності, внутрішній результат цієї діяльності);
– особистісні якості, рефлексія (особистісні характеристики, необхідні для найбільш ефективної роботи в певній ситуації, процес усвідомлення суб'єктом освіти своєї діяльності, критична самооцінка, пізнання своїх можливостей).

2.9 Поняття компетенції математичного моделювання

Компетенція математичного моделювання в педагогічну науку введена порівняно недавно. Стосовно до системи «школа-ЗВО», дану компетенцію можна визначити як здатність актуалізувати і застосовувати математичні знання і вміння при побудові, аналізі та інтерпретації математичних моделей в процесі розв'язання навчальних та практичних задач.

Згідно з наведеною вище структурою освітньої компетенції, виділимо наступні компоненти компетенції математичного моделювання.

1) Мотиваційно-ціннісне ставлення до математичних знань і вміння будувати математичні моделі в процесі навчальної та практичної діяльності. Зростання мотивації сприяє розумінню універсальності математичної мови. Знайомство з властивістю універсальності математичних моделей. Вивчаючи суміжні дисципліни і, одночасно, володіючи поняттями, етапами і методами математичного моделювання, студент має прийти до переконання, що математичні методи можуть слугувати в якості інструментарію досліджень в різних областях пізнання, в силу чого освоєння математичних дисциплін стає усвідомленою метою і включається в особистісний смисловий контекст діяльності студента.
2) Кругозір і постійне його розширення — невід'ємний компонент компетенції математичного моделювання. Мова йде не лише про засвоєння змісту навчальних дисциплін, а й постійне зростання культурного рівня студента. Інтерес до всього того, що відбувається в світі в даний час, до історії, до вітчизняної та зарубіжної культури, літератури, мистецтва неминуче супроводжується аналізом явищ і процесів, порівняльними характеристиками, логічними висновками і т.д. У свою чергу, зазначені форми розумової діяльності сприяють розвитку вмінь виділяти головне й відкидати другорядне, коротко і ясно висловлювати свої думки, ставити задачі, отримувати і чітко формулювати висновки, а ці вміння успішно вбудовуються в процеси математичного моделювання.
3) Знання та вміння як в області математики, так і в вихідних предметних областях є найбільш суттєвими компонентами даної компетенції. В першу чергу, мова йде про вміння актуалізувати математичні знання застосовні до моделі, яка будується в умовах конкретної ситуації. Володіння методом математичного моделювання передбачає розвиток цілого комплексу вмінь:

   – вміння розв'язувати задачі (постановка питання, підбір необхідної інформації для розв'язання задачі, аналіз проблемної ситуації, висунення гіпотези);
   – здатність до математизації об'єктів і процесів (визначення даних, умов і границь пошуку розв'язку, трансляція проблеми на мову математики, застосування адекватного математичного апарату);
   – вміння логічно мислити (дедуктивні та індуктивні умовиводи, комбінація логіки та інтуїції, аргументація висновків і заключень);

  - комунікативні вміння (читання, письмо, мовлення мовою математики, використання математичних символів і формул, побудова графіків, схем, діаграм);
  - вміння застосовувати сучасні інформаційні технології.

4) Досвід математичної діяльності, в тому числі, й в області математичного моделювання, сприяє закріпленню умінь у формі навичок. На основі досвіду, набутого в процесі розв'язання навчальних задач, виникає і розвивається здатність до експорту математичних знань і умінь на незнайомі ситуації, які постійно виникають у практичній фаховій діяльності.
5) Зрештою, рефлексія як самооцінка діяльності в галузі математичного моделювання сприяє розвитку таких якостей студента, як самоконтроль, відповідальність, раціональність, самостійність.

2.10 Паспорт формування компетенції математичного моделювання

Для уточнення результатів оволодіння компетенцією математичного моделювання в термінах «знати/вміти/володіти» використовується так званий паспорт компетенції, який є інтегральною складовою силабусу навчальної дисципліни відповідної бакалаврської чи магістерської програм. Він включає в себе:

- місце і значимість компетенції відповідно до вимог освітнього стандарту до рівня сформованості компетенції після закінчення освоєння відповідної освітньої програми;
- уточнення компонент змісту компетенції;
- структурування компетенції на рівні, показники і дескриптори.

Формування компетенції математичного моделювання в сукупному очікуваному результаті виконання освітньої програми майбутнього фахівця сприяє підготовці випускника до виконання таких видів навчальної та практичної діяльності:

- аналіз понять, фактів, ситуацій з різних предметних областей з використанням логічних висновків, математичної мови та методів математики і отримання, внаслідок цього, необхідної інформації в рамках відповідної предметної області;
- інтерполяція і екстраполяція результатів;
- прогнозування поведінки процесів засобами ймовірнісно-статистичної теорії;
- отримання, в кінцевому рахунку, практичних рекомендацій при вирішенні прикладних задач.

Водночас паралельно формуються додаткові компоненти змісту компетенції:

- предметна — теоретична основа компетенції математичного моделювання, що включає в себе математичні знання і вміння, а також відповідні способи дії: використання методів математичної логіки, геометрії, алгебри, математичного аналізу, стохастики і т.д.;

– власне модельна, що передбачає реалізацію вищеназваних етапів процесу моделювання;
– обчислювальна — розв'язання задач в загальному вигляді і з конкретними числовими значеннями величин, що передбачає знання правил і методів обчислень;
– прогностична — спрямована на з'ясування тенденцій розвитку станів явища або об'єкта, що досліджуються.

Результати навчання, які розкривають структуру компетенції і плановані рівні її сформованості вирізняють три наступних основних рівні.

– *Граничний рівень*, як мінімально необхідний для всіх випускників відповідних освітніх програм; на цьому рівні передбачається оволодіння мінімальною системою знань, умінь, навичок (ЗУН), достатніми для аналізу найпростіших математичних моделей. Робота з більш складними моделями може здійснюватися під керівництвом викладача.
– *Базовий рівень* дозволяє працювати з типовими задачами, використовувати відомі алгоритми, правила і методи як при розв'язанні власне математичних задач, так і на етапах математичного моделювання. Йдеться, по суті, про відповідність вимогам до результатів освоєння від провідних освітніх програм в частині математичних курсів на базовому рівні.
– *Просунутий рівень* — максимально можлива вираженість компетенції, яка важлива як якісний орієнтир для самовдосконалення. Тут йдеться про відповідність вимогам до результатів освоєння від провідних освітніх програм в частині математичних курсів на профільному і поглибленому рівнях.

Перелічимо основні (на думку авторського колективу) ознаки кожного з перерахованих рівнів (знати/ вміти/володіти). На граничному рівні студенту необхідно:

– *знати*: математичний апарат алгебри, математичного аналізу, диференціальних рівнянь, теорії функцій, теорії систем, методи дослідження функціональних залежностей, основні положення теорії ймовірностей та математичної статистики; класифікацію математичних моделей систем, вимоги та властивості математичних моделей, принципи виведення основних математичних моделей, закони, на основі яких виводяться математичні моделі природних процесів, методи моделювання важкоформалізованих процесів на прикладах конфліктних ситуацій, принцип аналогії та його застосування в математичному моделюванні, складати математичні моделі конкретних процесів та систем, знаходити розв'язки задач, якими описуються побудовані математичні моделі, використовуючи можливості інформаційні технології, як інтерпретувати знайдені розв'язки стосовно конкретних процесів та систем, для яких складалась математична модель основні;
– *вміти*: виконувати стандартні математичні перетворення і розв'язувати алгебраїчні, диференціальні рівняння та системи рівнянь, розв'язувати задачі аналізу, комбінаторики, теорії ймовірностей та мате-

матичної статистики, використовуючи інформаційні технології обробляти інформацію, представлену в таблицях, на діаграмах, графіках, масивах даних тощо;

– *володіти*: методами інтерпретації отриманих розв'язків задач, знаходження їх аналітичних і числових характеристик, методами диференціального числення при дослідженні динамічних моделей, способами систематизації та обробки статистичних та стохастичних даних.

Приведемо основні (на думку авторського колективу) ознаки кожного з перерахованих рівнів (знати/вміти/володіти).

На граничному рівні студенту необхідно

– *знати:* основний апарат алгебри, математичного аналізу, диференціальних рівнянь, основи теорії систем, основні положення теорії ймовірностей та математичної статистики; вимоги та властивості математичних моделей, принципи виведення основних математичних моделей, методи моделювання формалізованих процесів, складати математичні моделі конкретних процесів та систем, знаходити розв'язки задач, якими описуються побудовані математичні моделі, використовуючи можливості інформаційних технологій, як інтерпретувати знайдені розв'язки стосовно конкретних процесів та систем;

– *вміти:* виконувати прості математичні перетворення і розв'язувати алгебраїчні та диференціальні рівняння та їх системи, розв'язувати задачі аналізу, комбінаторики, теорії ймовірностей та математичної статистики, використовуючи інформаційні технології обробляти інформацію, представлену в таблицях, на діаграмах, графіках, масивах даних тощо;

– *володіти:* методами інтерпретації отриманих розв'язків задач, знаходження їх аналітичних і числових характеристик, методами диференціального числення, способами систематизації та обробки статистичних та стохастичних даних.

На базовому рівні студент повинен

– *знати*: в повному обсязі математичний апарат алгебри, математичного аналізу, диференціальних рівнянь, теорії функцій, теорії систем, методи дослідження функціональних залежностей, основні положення теорії ймовірностей та математичної статистики; класифікацію математичних моделей систем, вимоги та властивості математичних моделей, принципи виведення основних математичних моделей, закони, на основі яких виводяться математичні моделі природних процесів, методи моделювання важкоформалізованих процесів на прикладах конфліктних ситуацій, принцип аналогії та його застосування в математичному моделюванні, складати математичні моделі конкретних процесів та систем, знаходити розв'язки задач, якими описуються побудовані математичні моделі, використовуючи можливості інформаційних технологій, як інтерпретувати знайдені розв'язки стосовно конкретних процесів та систем, для яких складалась математична модель;

– *вміти*: доводити основні математичні твердження; виконувати основні кроки алгоритму математичного моделювання; розв'язувати алгебраїчні, диференціальні рівняння та системи рівнянь, задачі аналізу, комбінаторики, теорії ймовірностей та математичної статистики, використовуючи інформаційні технології обробляти необхідну інформацію; описувати та аналізувати масиви даних за допомогою відповідних статистичних характеристик, використовувати імовірнісні властивості об'єктів моделювання при прийнятті рішень;

– *володіти*: навичками усних, письмових, інструментальних обчислень при розв'язуванні практичних задач, символьною мовою алгебри, аналізу, теорії ймовірностей та статистики і її використанням при формалізації задач з суміжних областей і практико-орієнтованих задач; необхідними для розв'язання прийомами математичних перетворень, знаходження коренів рівнянь та систем рівнянь тощо; системою функціональних понять і фактів для опису і аналізу реальних залежностей; способами представлення та аналізу статистичних даних; способами вивчення статистичних закономірностей в реальному світі; способами побудови і вивчення імовірнісних моделей; методами інтерпретації отриманих розв'язків задач, знаходження їх аналітичних і числових характеристик.

На просунутому рівні передбачається, що студент, в доповнення до знань, засвоєних на базовому рівні, володіє первинними знаннями алгебри, топології, комплексного аналізу, теорії функцій, диференціальних та інтегральних рівнянь, системного аналізу, математичної фізики, а також вміє комбінувати відомі йому методи доведення при обґрунтуванні нових тверджень, переносити освоєні прийоми розв'язання задач на нові, в першу чергу, практичні ситуації.

Просунутий рівень передбачає, що студент володіє:

– спеціальними прийомами розв'язання складних задач спеціального фахового спрямування;
– методами структурного аналізу систем, методами процесного управління та реінжинірингу систем і їх складових;
– алгоритмами дослідження функціональних залежностей (включаючи асимптотичну поведінку систем, характеристиками обмежень тощо) та спеціальними прийомами інтегрування окремих класів рівнянь та систем рівнянь;
– розподілами випадкових величин і методами отримання точкових та інтервальних оцінок параметрів розподілів.

2.11 Лінії

2.11.1 Змістовно-методична лінія математичних моделей

Виділяємо чотири основних типи моделей, які виникають при розв'язуванні прикладних задач.

1) *Моделі логічного типу*: має місце формалізація міркувань засобами операцій над висловлюваннями і предикатами. Носієм моделі є, відповідно, алгебра висловлювань або логіка предикатів.
2) *Аналітичні моделі*: процеси функціонування реальних об'єктів, або систем записуються у вигляді явних функціональних залежностей.

Ці моделі поділяються на класи в залежності від математичної проблеми:

- перетворення (знаходження образу при функціонуванні деякого оператора);
- рівняння (алгебраїчні, трансцендентні, диференціальні, інтегральні) і нерівності;
- апроксимаційні задачі (задачі інтерполяції, екстраполяції, чисельні методи диференціювання, інтегрування, розв'язання диференціальних рівнянь);
- задачі оптимізації (задачі лінійного програмування, нелінійного програмування тощо).

3) *Геометричні моделі*, носіями в яких є факти і методи геометрії, а об'єктами дослідження — плоскі фігури, поверхні, багатогранники, тіла обертання і т.д.
4) *Моделі стохастичного типу* (аналіз даних, статистична обробка результатів спостереження, імовірнісні характеристики випадкових подій тощо).
5) *Моделі змішаного типу.* Так, наприклад, задачі, які розв'язуються засобами аналітичної або диференціальної геометрії використовують як аналітичний, так і геометричний апарат; стохастичні задачі, які розв'язуються на основі операцій над випадковими подіями, використовують властивості елементів булевих алгебр, загальних як для алгебри подій, так і для алгебр множин і висловлювань і т.д.

2.11.2 Математичний аналіз як засіб моделювання процесів та явищ

Як приклад розглянемо можливості інструментарію математичного аналізу у вирішенні проблем побудови аналітичних моделей. Зрозуміло, що математичний аналіз є фундаментальною дисципліною в сукупності усіх математичних курсів в системі вищої освіти, а його елементи є невід'ємною складовою практично всіх освітніх програм.

Зокрема, вивчення елементів математичного аналізу сприяє оволодінню системою функціональних понять, розвитку вміння використовувати функціонально-графічні представлення для розв'язання різних математичних задач, для опису і аналізу реальних залежностей. Якщо функцію однієї або декількох змінних розглядати як математичну модель реального процесу, то вибудовуються певні зв'язки понять, які описуються відповідними функціональними залежностями. Відтак побудова, аналіз та інтерпритація математичних моделей процесів і явищ вимагає освоєння студентами законів та властивостей диференціального та інтегрального числення. В табл.1 наведено зв'язки характеристик процесу і функціональних понять.

Таблиця 1

Характеристики процесу	**Функціональні поняття**
Тенденції процесу, які проявляються з плином часу.	Границя функції на нескінченності, асимптотична поведінка.
Неперервний перебіг процесу (перепади, збої).	Неперервність функції (розриви).
Швидкість перебігу процесу.	Похідна функції.
Зміни стану в малі інтервали часу.	Диференціал функції.
Зростання, падіння.	Монотонність функції.
Пікові стани (апогей, перигей).	Екстремуми функції (найбільше, найменше значення).
Відтворюваність станів процесу.	Періодичність функції.
Проміжні стани.	Інтерполяція.
Прогнозовані стани.	Екстраполяція.
Відтворення процесу за швидкістю його перебігу.	Невизначене інтегрування.
Зміна процесу на часовому інтервалі, який локально залежить від часу перебігу лінійним чином.	Визначений інтеграл.

2.11.3 Лінія математичних моделей

Кожна навчальна дисципліна містить основоположні поняття, навколо яких формується деякий зміст (інші поняття, пов'язані з базовими, судження та операції, необхідні для їх використання тощо) при цьому з кожним новим зверненням студентів до цих понять вони щоразу збагачують своє розуміння цих понять. Саме так формується цілісне многогранне підвищення освітнього рівня з поглибленими розумінням внутрішніх зв'язків, з використанням спеціальних методів та специфіки відповідної методології вивчення матеріалу.

В таких випадках говорять про певну змістовно-методичну лінію в програмі вивчення відповідної дисципліни. Лінію математичних моделей слід вибирати відповідно до освітнього рівня. Так, на початковому рівні розв'язуються простіші прикладні задачі, пов'язані з практичними ситуаціями, що пов'язані з фаховими особливостями спеціалізації студента (задачі з фізики, економіки, систематизація даних в масивах тощо).

Вивчаючи базові математичні дисципліни на початках необхідно одночасно розглядати моделі, які можуть бути представлені традиційними задачами на складання рівнянь (відсотки, рух, робота, суміші-сплави тощо), топологічних задач складного характеру, формалізованих завдань з фізики, економіки та інших предметних областей. Крім того, має місце систематичне моделювання комбінаторних ситуацій (використання комбінаторних співвідношень), ймовірнісне моделювання випадкових подій, аналіз вибірок і розподілів тощо.

На старших курсах студент володіє досить потужним арсеналом математичних методів. Відтак задачі на складання рівнянь повинні бути доповнені складними задачами фінансової математики, задачами оптимізації тощо. Корисно розглядати моделі, які вимагають використання інтеграційних методів (наприклад, геометричних, алгебраїчних та стохастичних).

Розглянемо, наприклад, як може бути представлена лінія математичних моделей в курсі математики бакалаврату інженерних напрямків. З авторської точки зору тут слід вибирати наступні модулі:

1) Елементи математичної логіки та теорії алгоритмів (даний модуль є інтегральним по відношенню до курсів математики та інформатики).
2) Лінійна алгебра та аналітична геометрія (інструмент моделювання економічних задач, задач оптимізації, теорії ігор, задач програмування).
3) Диференціально-інтегральне числення (задачі геометрії, механіки, електростатики, електродинаміки, економіки тощо).
4) Векторний аналіз (гідравліка, електродинаміка, теплофізика тощо).
5) Звичайні диференціальні рівняння (задачі опору матеріалів, моделі «природнього росту», «процесів вирівнювання», реклами тощо).
6) Диференціальні рівняння в частинних похідних (процеси механічних коливань, теплопровідності, дифузії тощо).
7) Теорія ймовірностей, математична статистика та теорія випадкових процесів (прогнозування подій, статистична обробка результатів вимірювань, марковські процеси, моделювання випадкових процесів методом Монте-Карло тощо).

2.11.4 Інноваційно змістовно-методичні лінії

Змістовно-методичну лінію предметної області називають інноваційною, якщо відповідний зміст:

– є затребуваним на всіх ступенях професійної освіти майбутнього фахівця;
– має визначену новину, інтегрує формально-компетентнісний та особистісно-дієвий підходи;
– є таким, що практично реалізовується та здатний підвищити ефективність діяльності суб’єктів освіти;
– апробовано та за результатами апробацій може бути впровадженим та розповсюдженим (дифундованим).

Ідея наповнення курсів математики вишівських освітніх програм задачами прикладної математики не є новою, проте проблема вибудовування наскрізних лінії математичних моделей, формування відповідного змісту і технологій вимагає подальшої розробки. Змістовно-методична лінія математичних моделей набуває особливої актуальності у зв’язку із впровадженням в математичній освіті компетентнісного підходу, і зокрема, в зв’язку з включенням до контрольно-вимірювальних матеріалів підсумкових освітніх атестаційних задач компетентнісно-орієнтованого характеру. Зокрема серед вимог до результатів освоєння програм бакалаврату, вимагається, щоб випускник, який опанував програму бакалаврату володів наступними загальнопрофаховими компетенціями:

– здатністю використовувати основні закони природничо-наукових дисциплін у професійній діяльності, застосовувати методи математичного аналізу, диференціального числення, теорії систем, теорії ймовірностей та математичного (комп'ютерного) моделювання, теоретичного і експериментального дослідження;
– здатністю виявити природничу сутність проблем, що виникають в ході професійної діяльності, залучити для їх розв'язання відповідний фізико-математичний апарат.

В закладах освіти створюються інноваційні майданчики по інноваційному розвитку математичного моделювання в системі фахової вищої освіти. Останнім часом активно поглиблюється процес узагальнення і дисемінації ефективних моделей і технологій реалізації розвитку математичної освіти в частині математичних моделей, що сприяє підвищенню відповідних компетентностей у молодих фахівців.

3 Висновки та перспективи подальших досліджень

В умовах постійної модернізації освітніх стандартів вищої професійної освіти і реалізації концепції розвитку математичної освіти актуалізується проблема формування практико- і професійно-орієнтованих умінь засобами загальноосвітніх предметних областей. Особливої актуальності набуває проблема зближення в навчальному процесі теоретичної і прикладної математики, яка вирішується засобами ефективного використання ідей і методів математичного моделювання.

Пропонується виділити в математичних курсах вишів, зокрема і в системі дуальної освіти, наскрізну змістовно-методичну лінію математичних моделей, в реалізації якої закладається найбільший потенціал для зростання мотивації студентів до математичної діяльності. Такий підхід є носієм інноваційності (затребуваності, новизни в змісті математичних курсів ЗВО і методики їх викладання, практико-орієнтована спрямованість тощо). Реалізація широкого впровадження прикладних задач в наскрізних математичних курсах спрямована на формування в студентів компетенції математичного моделювання, яку авторський колектив визначає як здатність актуалізувати і застосовувати математичні знання і вміння при побудові, аналізі та інтерпретації математичних моделей в процесі розв'язання навчальних і практичних задач. Проаналізовано наявні підходи до поняття математичної моделі, адаптовано відповідний понятійно-категорійний апарат до процесу розв'язання навчальних задач і продемонстровано на прикладах процес побудови, аналізу та інтерпретації моделей. Математична модель розглядається як гносеологічний інструмент, універсальний метод пізнання, який має властивості системності, інформаційності, образності, абстрактності, фундаментальності.

Проведене нами дослідження дало змогу виявити недостатній рівень обізнаності із застосування математичного моделювання та систем комп'ютерної алгебри, а також усвідомлення студентами актуальності цього курсу. Проведене дослідження не вичерпує всіх аспектів проблеми, що вивчається і має перспективу дослідження використання потенційних можливостей інформаційно-комунікаційних технологій для впровадження дієвих засобів навчання математичного моделювання на різних освітніх платформах.

Література

[1] Samarskij, A. A., and Mihajlov A. P. 2001. *Matematicheskoye modelirovaniye: Idei. Metody. Primery.* Moskow: Fizmatlit. (in Russian)

[2] Slepkan, Z. I. 2005. *Naukovi osnovy pedahohichnoho protsesu u vyshchii shkoli.* Kyiv: Vyshcha shkola. (in Ukrainian)

[3] Pollak, H. 1969. How can we teach application of mathematics? *Educ. Stud. Math.* 2:393–404.

[4] Zgurovsky, M., and Pankratova N. 2011. *Sistemnyy analiz: problemy, metodologiya, prilozheniya.* Kyiv: Naukova dumka. (in Russian)

[5] Blomhøj, M., Højgaard Jensen, T. 2003. Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Teaching Mathematics and its Applications* 22(3):123–139.

[6] Maaß, K. 2006. What are modelling competencies? *ZDM* 38(2):113–142.

[7] Blomhøj, M., Kjeldsen, T. 2011. Students' reflections in mathematical modelling projects. *Trends in teaching and learning of mathematical modelling*, 385–395.

[8] Frejd, P. 2014. *Modes of Mathematical modelling - An analysis of how modelling is used and interpreted in and out of school settings.* Linköping: Linköping University Electronic Press.

[9] Barbosa, J. 2006. Mathematical modelling in classroom: A socio-critical and discursive perspective, *ZDM* 38(3):293–301.

[10] Chapman, O. 2007. Mathematical modelling in high school mathematics: teachers' thinking and practice. In W. Blum, P. L. Galbraith, H-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education*, 325–332.

[11] Samoilenko, A., Kenzhebayev, K., Stanzhytsky, O., Taran, E. 2015. *Matematychne modeliuvannia.* Kyiv: Naukova dumka. (in Ukrainian)

[12] Cai, J., Morris, A., Hohensee, C., Hwang, S., Robinson, V., Cirillo, M., Kramer, S., Hiebert, J., Bakker, A. 2020. Maximizing the Quality of Learning Opportunities for Every Student. *J. Res. Math. Educ.* 51:12–25.

[13] Sokolowski, A. 2015. The Effects of Mathematical Modelling on Students' Achievement-Meta-Analysis of Research. IAFOR Journal of Education 3(1):93-114.

[14] Yasinsky, V. 2010. Issledovaniye protsessov samoorganizatsii v obrazovatelnykh sistemakh na osnove metoda sinergeticheskogo modelirovaniya. *Kibernetyka i systemnyi analiz* 2:161-174. (in Russian)

[15] Yasinsky, V. 2007. Systemne modeliuvannia protsesiv nakopychennia ta rozsiiuvannia znan. *Systemni doslidzhennia ta informatsiini tekhnolohii* 3:111–121. (in Ukrainian)

[16] Ghusak, L., Ghulivata, I. 2016. Matematychne modeliuvannia yak zasib realizatsii profesiinoi spriamovanosti navchannia matematyky ekonomichnykh spetsialnostei vyshchykh navchalnykh zakladiv. *Naukovyi visnyk uzhhorodskoho universytetu. Seriia: Pedahohika. Sotsialna robota* 1 (38): 105–107. (in Ukrainian)

[17] Borozenets, N. 2020. Formuvannia doslidnytskoi kompetentnosti studentiv ahrarnykh vuziv: vykorystannia metodu matematychnoho modeliuvannia.

Nepererevna profesiina osvita: teoriia i praktyka (Seriia: Pedahohichni nauky) 4(65):59–65. (in Ukrainian)

[18] Perry, Z., Todder, D. 2009. Change in senior medical students' attitudes towards the use of mathematical modelling as a means to improve research skills. *Teaching Mathematics and its Applications* 28(2):88–100.

[19] Creswell, J. 2013. *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches.* Thousand Oaks: Sage.

[20] Krutikhina, M., Vlasova, V., Galushkin, A., Pavlushin, A. 2018. Teaching of mathematical modeling elements in the mathematics course of the secondary school. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education* 14(4):1305-1315.

[21] Iversen, S., Larson, C. 2006. Simple thinking using complex math vs. complex thinking using simple math — A study using model eliciting activities to compare students' abilities in standardized tests to their modelling abilities. *Spribger, ZDM* 38:281–292.

[22] Shapovalova, N., Panchenko, L., Kuchmenko, S. 2019. Naukovo-metodychna spetsyfika ta perevahy vyvchennia matematychnoho modeliuvannia starshoklasnykamy. *Osvita. Innovatyka. Praktyka*, 1(5):31-39. (in Ukrainian)

[23] Hair, J., Hult, G., Ringle, C., Sarstedt, M. 2017. *A primer on partial least squares structural equation modeling (PLS-SEM) (2nd ed.).* Thousand Oaks: Sage.

[24] Zgurovsky, M., Pankratova, N. 2007. *Osnovy systemnoho analizu.* Kyiv: BHV Publishing Group. (in Ukrainian)

[25] Barabash, O., Kopiika, O., Zamrii, I., Sobchuk, V., Musienko, A. 2019. Fractal and Differential Properties of the Inversor of Digits of Q_s-Representation of Real Number. *Modern Mathematics and Mechanics: Fundamentals, Problems and Challenges, Springer* 79–95.

[26] Hnatiienko, H. 2019. Choice Manipulation in Multicriteria Optimization Problems. Selected Papers of the XIX International Scientific and Practical Conference "Information Technologies and Security", Kyiv, November 28.

[27] Hnatiienko, H., Snytyuk, V., Tmienova, N.,Voloshyn, O. 2021. Determining the effectiveness of scientific research of universities staff. CEUR Workshop Proceedings, 7th International Conference "Information Technology and Interactions", Kyiv, December 02–03.